ΩΘΗΣΗ

ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΘΗΣΗ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2013

Επιμέλεια:

Ομάδα Φυσικών της Ώθησης

Τετάρτη, 22 Μαΐου 2013
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Στις ημιτελείς προτάσεις **Α1-Α4** *να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία τη συμπληρώνει σωστά.*

Α1. Περιπολικό ακολουθεί αυτοκίνητο που έχει παραβιάσει το όριο ταχύτητας. Τα δύο αυτοκίνητα κινούνται με ίσες ταχύτητες. Αν η σειρήνα του περιπολικού εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S, τότε, η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο οδηγός του άλλου αυτοκινήτου είναι:

α. $f_A = 2f_S$

β. $f_A = \frac{1}{2} f_S$

γ. $f_A = f_S$

δ. $f_A = 0$

Μονάδες 5

Α2. Διακρότημα δημιουργείται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, με ίδιο πλάτος, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, όταν οι ταλαντώσεις αυτές έχουν:

α. ίσες συχνότητες και ίδια φάση

β. ίσες συχνότητες και διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$

γ. παραπλήσιες συχνότητες

δ. ίσες συχνότητες και διαφορά φάσης π

Μονάδες 5

Α3. Σε μια μηχανική ταλάντωση της οποίας το πλάτος φθίνει χρονικά ως $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$, όπου A_0 είναι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης και Λ είναι μια θετική σταθερά, ισχύει ότι:

α. οι μειώσεις του πλάτους σε κάθε περίοδο είναι σταθερές

β. η δύναμη αντίστασης είναι $F_{αντ} = -b \cdot υ^2$, όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης και υ η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται

γ. η περίοδος Τ της ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο για μικρή τιμή της σταθεράς απόσβεσης b

δ. η δύναμη αντίστασης είναι $F_{αντ} = -b \cdot υ$ όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης και υ η ταχύτητα του σώματος που ταλαντώνεται

Μονάδες 5

Α4. Κατά τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό, σε μεγάλη απόσταση από την πηγή, ισχύει ότι:

α. στη θέση που η ένταση Ε του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, η ένταση Β του μαγνητικού πεδίου είναι μέγιστη

β. τα διανύσματα των εντάσεων Ε του ηλεκτρικού και Β του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλα μεταξύ τους

γ. το διάνυσμα της έντασης Ε του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος

δ. το διάνυσμα της έντασης Β του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλο στη διεύθυνση διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Μονάδες 5

Α5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Το όζον της στρατόσφαιρας απορροφά κατά κύριο λόγο την επικίνδυνη υπεριώδη ακτινοβολία.

β. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητας του σώματος που ταλαντώνεται καθώς αυξάνεται το μέτρο της δύναμης επαναφοράς.

γ. Κατά τη διάδοση μηχανικού κύματος μεταφέρεται ορμή από ένα σημείο του μέσου στο άλλο.

δ. Σε στερεό σώμα σφαιρικού σχήματος που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από άξονα διερχόμενο από το κέντρο του ισχύει πάντα $\Sigma F = 0$.

ε. Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες αλλά μη συγγραμμικές

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. → γ.

Α2. → γ.

Α3. → δ.

Α4. → γ.

Α5. → α. → Σ

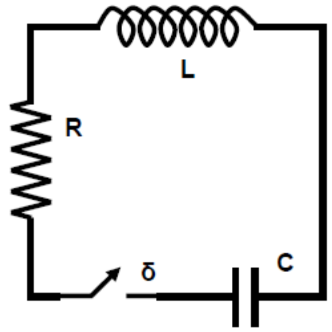
β. → Λ

γ. → Σ

δ. → Λ

ε. → Σ

ΘΕΜΑ Β



Β1. Στο κύκλωμα του σχήματος ο πυκνωτής χωρητικότητας $C = 20\times10^{-6}$ F είναι φορτισμένος σε τάση V_C=20V και το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = \frac{1}{9}\times10^{-3}\,H$.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε το διακόπτη δ. Κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t_1, το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι 6 A. Από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t_1 η συνολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης μειώθηκε κατά:

i) 1×10^{-3} J

ii) 2×10^{-3} J

iii) 4×10^{-3} J

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή είναι η **ii).**

β) **Αιτιολόγηση:**

Αρχικά η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_{αρχ} = \frac{1}{2}C\cdot V_C^2 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot10^{-6}\cdot 20^2\,J \Rightarrow \underline{E_{αρχ} = 4\cdot10^{-3}\,J}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E_{τελ} = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{q_1^2}{2C},$$

αλλά είναι $q_1 = 0$, οπότε

$$E_{τελ} = \frac{1}{2}Li_1^2 + 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot10^{-3}\cdot 36J \Rightarrow \underline{E_{τελ} = 2\cdot10^{-3}\,J}$$

Οπότε η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος, είναι

$$\Delta E = E_{τελ} - E_{αρχ} = (2\cdot10^{-3} - 4\cdot10^{-3})J \Rightarrow \boxed{\Delta E = -2\cdot10^{-3}\,J}$$

Άρα πρόκειται για μείωση της ενέργειας του συστήματος κατά $2\cdot10^{-3}$J, εξαιτίας της έκλυσης θερμότητας και της εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Β2. Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που βρίσκονται αντίστοιχα στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας υγρού παράγουν πανομοιότυπα εγκάρσια αρμονικά κύματα με ίδιο πλάτος, ίσες συχνότητες f_1 και ίσα μήκη κύματος $λ_1$. Αν η απόσταση των σημείων Κ και Λ είναι $d = 2λ_1$, τότε δημιουργούνται τέσσερις υπερβολές απόσβεσης, μεταξύ των σημείων Κ και Λ.

Αλλάζοντας την συχνότητα των δύο πηγών σε $f_2 = 3\ f_1$ και διατηρώντας το ίδιο πλάτος, ο αριθμός των υπερβολών απόσβεσης, που δημιουργούνται μεταξύ των δύο σημείων Κ και Λ, είναι:

i) 6

ii) 8

iii) 12

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή είναι η **iii).**

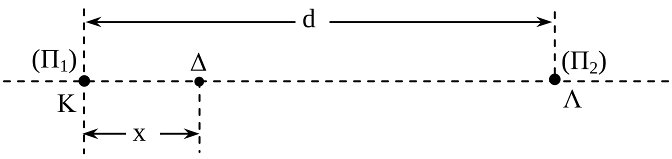
β) **<u>Αιτιολόγηση</u>:**

Σύμφωνα με τη Θ.Ε.Κ. και επειδή η ταχύτητα διάδοσης των επιφανειακών κυμάτων είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις, θα έχουμε

$$υ_1 = υ_2 = υ \Rightarrow f_1 \cdot λ_1 = f_2 \cdot λ_2 \Rightarrow f_1 \cdot λ_1 = 3f_1 \cdot λ_2 \Rightarrow \underline{λ_2 = \frac{λ_1}{3}} \ \text{ ή } \ \underline{λ_1 = 3λ_2} \quad (1)$$

Επομένως η απόσταση των δύο πηγών είναι

$$d = 2λ_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} d = 2 \cdot 3λ_2 \Rightarrow \underline{d = 6λ_2} \quad (2)$$



Έστω Δ ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ που παραμένει ακίνητο μετά τη συμβολή. Με βάση το παραπάνω σχήμα θα έχουμε

$$|A'_Δ| = 0 \Leftrightarrow r_1 - r_2 = (2κ+1)\frac{λ_2}{2} \ \text{ ή } \ x - (d - x) = (2κ+1)\frac{λ_2}{2} \Rightarrow 2x - d = (2κ+1)\frac{λ_2}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} 2x = 6λ_2 + κλ_2 + \frac{λ_2}{2} \Rightarrow 2x = \frac{13λ_2}{2} + κλ_2 \Rightarrow x = \frac{13}{4}λ_2 + \frac{κ}{2}λ_2 \ \text{ ή } \ \underline{x = (\frac{13}{4} + \frac{κ}{2})λ_2} \quad (3)$$

Επίσης θα πρέπει να ισχύει

$$\underline{\underline{0 < x < d}} \underset{(2)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} 0 < (\frac{13}{4} + \frac{κ}{2})λ_2 < 6λ_2 \Rightarrow 0 < \frac{13}{4} + \frac{κ}{2} < 6 \Rightarrow -\frac{13}{4} < \frac{κ}{2} < 6 - \frac{13}{4} \Rightarrow$$

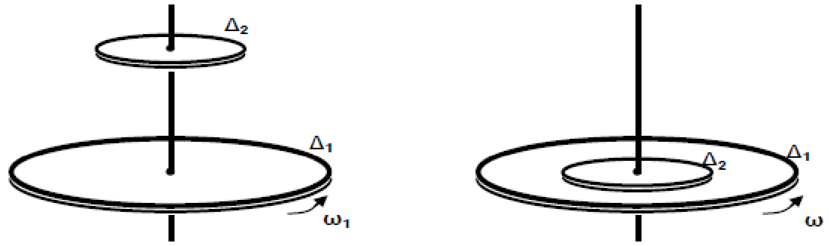
$$\Rightarrow -\frac{13}{4} < \frac{κ}{2} < \frac{11}{4} \Rightarrow -6{,}5 < κ < 5{,}5 \Rightarrow κ = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Επομένως πρόκειται για 12 υλικά σημεία.

Β3. Ένας δίσκος Δ_1 με ροπή αδράνειας I_1 στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 και φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

Ένας δεύτερος δίσκος Δ_2 με ροπή αδράνειας $I_2 = \frac{I_1}{4}$, που αρχικά είναι ακίνητος, τοποθετείται πάνω στο δίσκο Δ_1, ενώ αυτός περιστρέφεται, έτσι ώστε να έχουν κοινό άξονα περιστροφής, που διέρχεται από τα κέντρα των δύο δίσκων, όπως δείχνει το σχήμα.

Μετά από λίγο οι δύο δίσκοι αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα ω.



Αν L_1 είναι το μέτρο της αρχικής στροφορμής του δίσκου Δ_1, τότε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του δίσκου Δ_1 είναι:

i) 0

ii) $\frac{1}{5}L_1$

iii) $\frac{2}{5}L_1$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή είναι η **ii).**

β) **Αιτιολόγηση:**

Επειδή ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$ ως προς τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του συστήματος ως προς αυτόν τον άξονα διατηρείται σταθερή. Οπότε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow L_1 + L_2 = L_{\Sigma\Sigma} \Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 + 0 = I_{o\lambda} \cdot \omega \Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 = (I_1 + I_2) \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 = (I_1 + \frac{I_1}{4}) \cdot \omega \Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 = \frac{5I_1}{4} \cdot \omega \Rightarrow \omega_1 = \frac{5}{4}\omega \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{4\omega_1}{5}}} \quad (1)$$

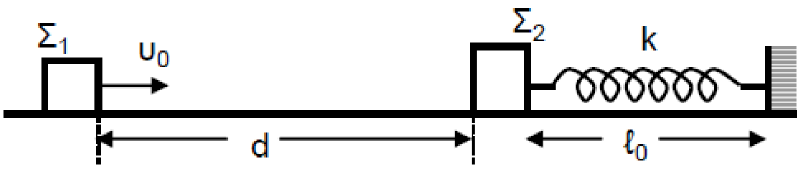
Για τη μεταβολή της στροφορμής του δίσκου Δ_1 θα ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} \Delta L_1 = L_1' - L_1 \\ L_1 = I_1 \cdot \omega_1 \\ L_1' = I_1 \cdot \omega \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta L_1 = I_1 \cdot \omega - I_1 \cdot \omega_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \Delta L_1 = I_1(\frac{4\omega_1}{5} - \omega_1) \Rightarrow \Delta L_1 = -\frac{I_1 \cdot \omega_1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta L_1 = -\frac{1}{5}L_1 \text{ , οπότε } \boxed{|\Delta \vec{L}_1| = \frac{1}{5}L_1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα $Σ_1$ με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα $Σ_2$ με μάζα $m_2 = 2\ m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω $υ_0$ η ταχύτητα που έχει το σώμα $Σ_1$ τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση d = 1 m από το σώμα $Σ_2$. Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα $Σ_2$ είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k, και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0. Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά τη κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα $Σ_1$ αποκτά ταχύτητα με μέτρο $υ_1' = \sqrt{10}$ m/s και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι μ = 0,5 και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\ m/s^2$.

Γ1. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα $υ_0$ του σώματος $Σ_1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα $Σ_1$ στο σώμα $Σ_2$ κατά την κρούση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος $Σ_1$ από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.
Δίνεται : $\sqrt{10} \approx 3{,}2$

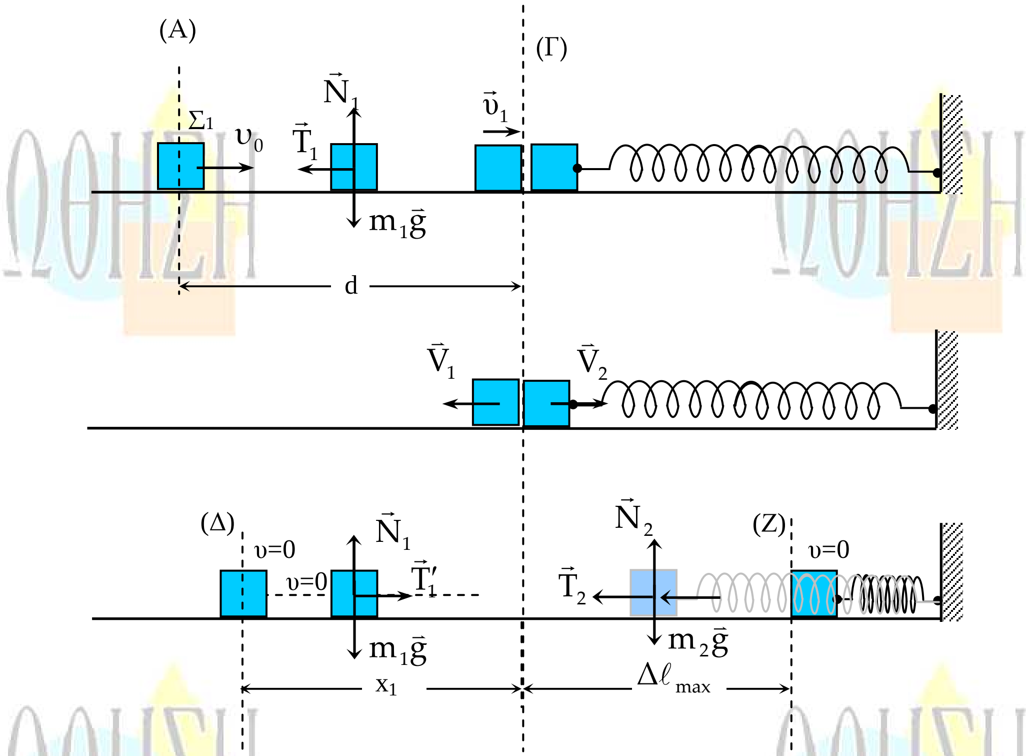
Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2 = 1Kg$ και k = 105 N/m.

Μονάδες 7

Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και ότι τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Γ1. Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ (Α) → (Γ) για το m_1 :

$$K_\Gamma - K_A = W_{N_1} + W_{B_1} + W_{T_1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -T_1\cdot d \\ \text{όπου } \ T_1 = \mu N_1 = \mu m_1 g \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow \underline{\upsilon_0^2 = \upsilon_1^2 + 2\mu g d} \quad (1)$$

Για την ελαστική κρούση μεταξύ των Σ_1, Σ_2, σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ορμής και την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1}\upsilon_1 \Rightarrow V_1 = -\frac{m_1}{3m_1}\upsilon_1 \\ V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow V_2 = \frac{2m_1}{3m_1}\upsilon_1 \Rightarrow V_2 = \frac{2m_1}{3m_1}\upsilon_1 \end{array}\right\},$$

άρα $\quad V_1 = -\frac{\upsilon_1}{3}$ (2), $\quad V_2 = \frac{2}{3}\upsilon_1$ (3).

Από τη σχέση (2) έχουμε

$$-\sqrt{10}\,m/s = -\frac{\upsilon_1}{3} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 3\sqrt{10}\,m/s}$$

και από τη σχέση (1) προκύπτει $\upsilon_0 = \sqrt{90 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10}\ m/s \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 10 m/s}$

Γ2. Από τη σχέση (3) προκύπτει $v_2 = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{10}\,m/s \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{10}\,m/s$

και έτσι το ποσοστό που ζητείται θα είναι

$$\Pi = \frac{K_2'}{K_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2^2}{\frac{1}{2}m_1 \upsilon_1^2} \cdot 100\% = \frac{2m_1 v_2^2}{m_1 \upsilon_1^2} \cdot 100\% = 2 \cdot \frac{4 \cdot 10}{9 \cdot 10} \cdot 100\% = \frac{800}{9}\% \Rightarrow \boxed{\Pi = \frac{800}{9}\%}$$

Γ3. Για την κίνηση από το Α στο Γ για το Σ1 ισχύει:

$$\sum F_x = m_1 \alpha_1 \Rightarrow -T_1 = m_1 \alpha_1 \Rightarrow -\mu m_1 g = m_1 \alpha_1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -\mu g = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

Δηλαδή το Σ1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με $\underline{\alpha_1 = -5m/s^2}$, άρα

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha_1(t_1 - t_0) \Rightarrow 3\sqrt{10} = 10 - 5(t_1 - 0) \Rightarrow 5t_1 = -9{,}6 + 10 \Rightarrow 5t_1 = 0{,}4s \Rightarrow t_1 = \frac{4}{50}s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{4}{50}s} \quad \text{ή} \quad \boxed{t_1 = 0{,}08s}$$

Για την κίνηση από το Γ στο Δ η επιτάχυνση θα έχει το ίδιο μέτρο, άρα

$$\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda.} = \upsilon_1' + \alpha \cdot (\Delta t) \Rightarrow 0 = -\sqrt{10} + 5\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3{,}2}{5} = 0{,}64s$$

$$\text{οπότε} \quad \underline{t_{o\lambda} = t_1 + \Delta t = 0{,}72s}$$

Γ4. Για το σύστημα ελατήριο – μάζα m2 εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ (Γ) → (Ζ):

$$K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{T_2} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_{N_2} + W_{B2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = W_{T_2} + U^{\varepsilon\lambda}_{\alpha\rho\chi.} - U^{\varepsilon\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow -\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = -T_2 \cdot \Delta\ell_{max} + (0 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2_{max}) \\ \text{όπου} \quad T_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g = 5N \end{array}\right\} \Rightarrow$$

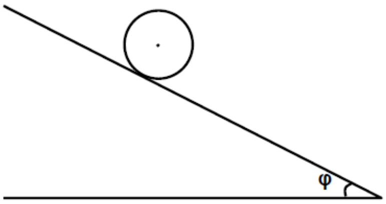
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 10 = -5\Delta\ell_{max} - \frac{1}{2} \cdot 105 \cdot \Delta\ell^2_{max} \Rightarrow 105\Delta\ell^2_{max} + 10\Delta\ell_{max} - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21\Delta\ell^2_{max} + 2\Delta\ell_{max} - 8 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_{max} = \frac{-2 \pm \sqrt{676}}{42} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta\ell_{max} = \frac{12}{21}m \\ \Delta\ell_{max} = -\frac{28}{42}m < 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{άρα} \quad \underline{\underline{\Delta\ell_{max} = \frac{12}{21}m = \frac{4}{7}m \approx 0{,}57m}}$$

ΘΕΜΑ Δ

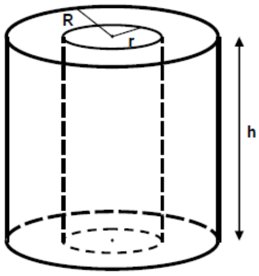
Δίνεται συμπαγής, ομογενής κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R. Αφήνουμε τον κύλινδρο να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Δ1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
Ο άξονας του κυλίνδρου διατηρείται οριζόντιος.

Μονάδες 5

Δ2. Από το εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου, που έχει ύψος h, αφαιρούμε πλήρως ένα ομοαξονικό κύλινδρο ακτίνας r, όπου r < R, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:

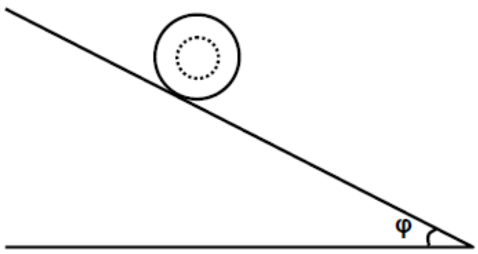


Να αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, ως προς τον άξονα του, που προκύπτει μετά την αφαίρεση του εσωτερικού κυλινδρικού τμήματος, είναι

$$I_{κοιλ.} = \frac{1}{2} M \cdot R^2 (1 - \frac{r^4}{R^4})$$

Μονάδες 7

Στη συνέχεια λιπαίνουμε το κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και το επανατοποθετούμε στη θέση του, ούτως ώστε να εφαρμόζει απόλυτα με τον κοίλο κύλινδρο χωρίς τριβές. Το νέο σύστημα που προκύπτει αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση, υπό την επίδραση της βαρύτητας (με επιτάχυνση της βαρύτητας g), στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Δ3. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος.

Μονάδες 7

Δ4. Όταν $r = \frac{R}{2}$, να υπολογίσετε, σε κάθε χρονική στιγμή της κύλισης στο κεκλιμένο επίπεδο, το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του συστήματος.

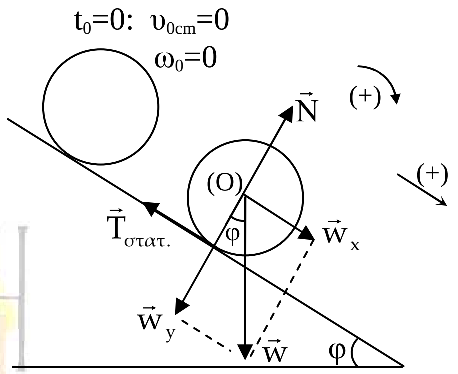
Μονάδες 6

Ο άξονας του συστήματος διατηρείται πάντα οριζόντιος.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας I συμπαγούς και ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο στρέφεται: $I = \frac{1}{2} M R^2$.

Ο όγκος V ενός συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h: $V = \pi R^2 h$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Δ1. Εφαρμόζοντας την Α.Α.Κ για την κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμε:

<u>Μεταφορική κίνηση</u>

Θ.ΝΜ: $\Sigma\vec{F}_x = \vec{w}_x + \vec{T}_{στ} = M \cdot \vec{a}_{cm} \Rightarrow Mgημφ - T_{στ} = M \cdot a_{cm}$ (1)

<u>Περιστροφική Κίνηση:</u>

<u>ΘΝΠΚ</u>: $$\left.\begin{array}{l}\Sigma\vec{\tau}_{\vec{F}(O)} = \vec{\tau}_{\vec{T}_{στ(O)}} = I_{cm} \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow T_{στ.} \cdot R = \dfrac{MR^2}{2} \cdot \alpha \\ κ.χ.ο \Rightarrow a_{cm} = \alpha \cdot R\end{array}\right\} \Rightarrow T_{στ} = \frac{M}{2} \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Από (1) + (2) $\Rightarrow Mgημφ = \frac{3}{2} Ma_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2g}{3}ημφ}$

Δ2. Αφού ο κύλινδρος είναι ομογενής η πυκνότητά του είναι σταθερή

$$\varrho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \varrho \cdot V \quad (3)$$

Επομένως η μάζα του εσωτερικού ακτίνας r (r < R) θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} m_r = \varrho \cdot V_r \\ V_r = \pi r^2 h \end{array}\right\} \Rightarrow m_r = \varrho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (4)$$

Για τον κύλινδρο αρχικά έχουμε:

$$(3) \Rightarrow \varrho = \frac{M}{V_R} = \frac{M}{\pi R^2 h} \quad (5)$$

Από (4) , (5) $\Rightarrow m_r = \dfrac{M}{\pi R^2 h}\cdot \pi r^2 h \Rightarrow m_r = M\cdot\dfrac{r^2}{R^2}$ (6)

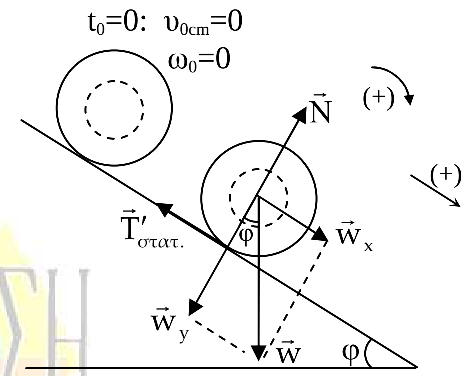
Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ακτίνας r θα είναι:

$$I_{cm_r} = \frac{1}{2} m_r \cdot r^2 \overset{(6)}{\Rightarrow} I_{cm_r} = \frac{1}{2} M\cdot\frac{r^4}{R^2} \quad (7)$$

Επομένως η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου θα είναι:

$$I_{κοιλ.} = I_{cm_R} - I_{cm_r} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}M\frac{r^4}{R^4} \Rightarrow \boxed{I_{κοιλ.} = \frac{1}{2}MR^2\cdot(1-\frac{r^4}{R^4})} \quad (8)$$

Δ3.



Για τη μελέτη της νέας κύλισης έχουμε:

<u>Μεταφορική κίνηση</u>:

<u>Θ.Ν.Μ.</u> $\Sigma\vec{F}_x = \vec{w}_x + \vec{T}'_{στατ.} = M\cdot\vec{a}'_{cm} \Rightarrow M\cdot g\cdot ημφ - T'_{στατ.} = M\cdot a'_{cm}$ (9)

<u>Περιστροφική κίνηση</u>:

<u>Θ.Ν.Π.Κ.</u>

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\vec{\tau}_{\vec{F}'_{(O)}} = \vec{\tau}_{\vec{T}'_{στατ.(O)}} = I_{κοιλ.}\cdot\vec{\alpha}' \Rightarrow T'_{στατ.}\cdot R = I_{κοιλ.}\cdot\alpha' \\ \text{κύλιση χωρίς ολίσθηση: } a'_{cm} = \alpha'\cdot R \Rightarrow \alpha' = \dfrac{a'_{cm}}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow T'_{στατ.} = \frac{I_{κοιλ.}}{R^2}\cdot a'_{cm} \quad (10)$$

Από (9) + (10) $\Rightarrow M\cdot g\cdot ημφ = (M + \dfrac{I_{κοιλ.}}{R^2})\cdot a'_{cm} \Rightarrow a'_{cm} = \dfrac{M\cdot ημφ}{M+\dfrac{I_{κοιλ.}}{R^2}}\cdot g \overset{(8)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow a'_{cm} = \frac{M\cdot ημφ}{M + \dfrac{1}{R^2}\cdot\dfrac{1}{2}M\cdot R^2(1-\dfrac{r^4}{R^4})}\cdot g = \frac{ημφ}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{r^4}{2R^4}}\cdot g \Rightarrow \boxed{a'_{cm} = \frac{2R^4\cdot ημφ}{3R^4 - r^4}\cdot g} \quad (11)$$

Δ4. Για $r = \dfrac{R}{2}$ από τη σχέση (8) έχουμε:

$$I_{κοιλ.} = \frac{1}{2}M\cdot R^2(1-\frac{\frac{R^4}{16}}{R^4}) \Rightarrow I_{κοιλ.} = \frac{15M\cdot R^2}{32} \quad (12)$$

Για την τυχαία θέση της τροχιάς:

$$K^{MK} = \frac{1}{2} M \cdot \upsilon_{cm}^2 \quad (13)$$

$$K^{\Pi K} = \frac{1}{2} I_{\kappa o\iota\lambda.} \cdot \omega^2 \overset{(12)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{15M \cdot R^2}{32} \cdot \frac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15M}{32} \cdot \upsilon_{cm}^2 \quad (14)$$

όπου από Κ.Χ.Ο. $\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R}$.

Άρα από (13), (14): $\frac{K^{MK}}{K^{\Pi K}} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{32} \cdot m \cdot \upsilon_{cm}^2} \Rightarrow \boxed{\frac{K^{MK}}{K^{\Pi K}} = \frac{32}{15}}$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα είναι ιδιαιτέρως απαιτητικά, αλλά παράλληλα είναι και ιδιαιτέρως σαφή, ώστε να μπορούν να κατανοηθούν και να αντιμετωπιστούν από τους υποψηφίους. Ειδικότερα:

Οι ερωτήσεις που κλήθηκαν να απαντήσουν οι υποψήφιοι στο θέμα Α δεν παρουσιάζουν σημεία άξια σχολιασμού σε αντίθεση με τα επόμενα θέματα.

Το θέμα Β περιέχει τρεις ποιοτικές ερωτήσεις με την ερώτηση Β2 να αναδεικνύεται κατά την άποψή μας στο πρώτο ιδιαίτερα απαιτητικό ζητούμενο της σημερινής εξέτασης.

Το θέμα Γ παρουσιάζει κλιμακούμενη δυσκολία με το ερώτημα Γ4 να καθορίζει το επίπεδο της δυσκολίας του θέματος και να αποτελεί το δεύτερο σημαντικό εμπόδιο στην πορεία προς το άριστα.

Τέλος, το θεωρητικό πρόβλημα που περιέχει το θέμα Δ αποτελεί, κατά την γνώμη μας, μια αρκετά δύσκολη άσκηση στο κεφάλαιο της Μηχανικής του Στερεού ,γιατί απαιτεί πολύ δύσκολους αλγεβρικούς υπολογισμούς και υψηλού επιπέδου φυσική διαίσθηση.

Συνεπώς τα σημερινά απαιτητικά θέματα είναι ποιοτικά, σαφή με σχετικά μεγάλη έκταση , δηλαδή είναι θέματα που μπορούν να αντιμετωπιστούν μόνο από καλά προετοιμασμένους και προσεκτικούς υποψηφίους.