ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2015

Επιμέλεια:
Ομάδα Φυσικών της Ώθησης

Παρασκευή, 29 Μαΐου 2015
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Στις ημιτελείς προτάσεις **Α1-Α4** *να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.*

Α1. Η συχνότητα μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης

α) είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη

β) είναι πάντα ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή

γ) εξαρτάται από την αρχική ενέργεια της ταλάντωσης

δ) είναι ίση με το άθροισμα της συχνότητας του διεγέρτη και της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή.

Μονάδες 5

Α2. Ποια από τις περιοχές του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας έχει τη μικρότερη συχνότητα;

α) η υπέρυθρη ακτινοβολία

β) τα ραδιοκύματα

γ) το ορατό φως

δ) οι ακτίνες γ

Μονάδες 5

Α3. Δύο σφαίρες Α και Β με ίσες μάζες, μία εκ των οποίων είναι ακίνητη, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Το ποσοστό της μεταβιβαζόμενης ενέργειας από τη σφαίρα που κινείται στην αρχικά ακίνητη σφαίρα είναι:

α) 100%

β) 50%

γ) 40%

δ) 0%

Μονάδες 5

Α4. Ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα. Εάν διπλασιαστεί η στροφορμή του, χωρίς να αλλάξει ο άξονας περιστροφής γύρω από τον οποίο αυτό περιστρέφεται, τότε η κινητική του ενέργεια

α) παραμένει σταθερή

β) υποδιπλασιάζεται

γ) διπλασιάζεται

δ) τετραπλασιάζεται

Μονάδες 5

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Σε μία φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας (F=-bυ), για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης b η περίοδος μειώνεται

β) Η σχέση που περιγράφει το φαινόμενο Doppler για το φως είναι διαφορετική από αυτήν που ισχύει για τον ήχο

γ) Τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης είναι κοινά σε όλα τα είδη κυμάτων, ηλεκτρομαγνητικά και μηχανικά.

δ) Η σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, της ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από ίδιο σημείο με συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, είναι απλή αρμονική ταλάντωση

ε) Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου τους.

Μονάδες 5

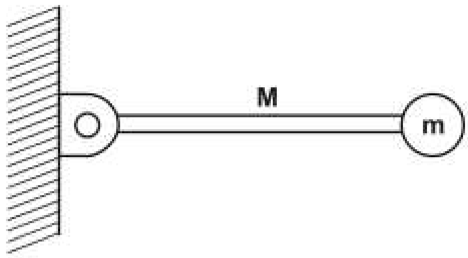
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. → **α)**
Α2. → **β)**
Α3. → **α)**
Α4. → **δ)**

Α5.
α) → Λάθος
β) → Σωστό
γ) → Σωστό
δ) → Λάθος
ε) → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας Μ και μήκους L μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Στο άλλο άκρο της ράβδου, είναι στερεωμένο σφαιρίδιο μάζας m= M/2 (σχήμα 1). Τη χρονική στιγμή που το σύστημα ράβδου-σφαιριδίου αφήνεται να κινηθεί από την οριζόντια θέση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου είναι:



Σχήμα 1

i) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \frac{1}{2}MgL$ ii) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = MgL$ iii) $\frac{\Delta L_\rho}{\Delta t} = \frac{2}{5}MgL$

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της που περνά από το άκρο της, είναι $I_\rho = \frac{1}{3}ML^2$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

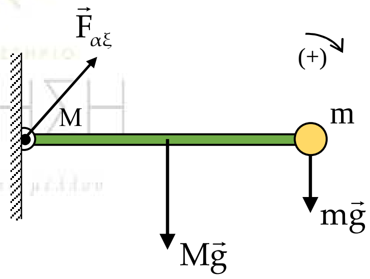
Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή απάντηση είναι η **iii)**.

β) Αιτιολόγηση:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα ράβδος – σφαιρίδιο.



Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς την άρθρωση ισχύει:

$$I_{συστ} = I_{ράβδου} + I_{σφαιριδίου} \Rightarrow I_{συστ} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{M}{2}L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{συστ} = \frac{5}{6}ML^2$$

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}_{συστ} = \Sigma\vec{\tau}_{συστ} = I_{συστ}\cdot\vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow \vec{\tau}_{\vec{F}_{αξ}} + \vec{\tau}_{M\vec{g}} + \vec{\tau}_{m\vec{g}} = I_{συστ}\cdot\vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + Mg\cdot\frac{L}{2} + mgL = I_{συστ}\cdot\alpha_{\gamma} \Rightarrow Mg\cdot\frac{L}{2} + \frac{M}{2}\cdot gL = \frac{5}{6}ML^2\cdot\alpha_{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{5}{6}L\cdot\alpha_{\gamma} \Rightarrow \underline{\alpha_{\gamma} = \frac{6g}{5L}} \quad (1)$$

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}_{ράβδου} = \Sigma\vec{\tau}_{ράβδου} = I_{ράβδου}\cdot\vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow \frac{dL}{dt}_{ράβδου} = I_{ράβδου}\cdot\alpha_{\gamma} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{dL}{dt}_{ράβδου} = \frac{1}{3}ML^2\cdot\frac{6g}{5L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dL}{dt}_{ράβδου} = \frac{2}{5}MgL}}$$

Β2. Ένα στάσιμο κύμα που δημιουργείται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = 2Aσυν\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)ημ\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

Το πλάτος ταλάντωσης A' ενός σημείου M του ελαστικού μέσου που βρίσκεται δεξιά του τρίτου δεσμού από το σημείο $x = 0$ και σε απόσταση λ/12 από αυτόν είναι:

i) $A' = A\sqrt{3}$ ii) $A' = A/2$ iii) $A' = A$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Δίνεται: $συν\frac{2π}{3} = -\frac{1}{2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή απάντηση είναι η **iii).**

β) Αιτιολόγηση:

Για το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει η σχέση:

$$A' = 2A\left|συν\left(\frac{2π}{λ}\cdot x\right)\right| \quad (1)$$

Η θέση x του σημείου M θα βρεθεί ως εξής:

$$x = x_Δ + Δx,$$

όπου $Δx = \frac{λ}{12}$ και $x_Δ$ η θέση του αντίστοιχου δεσμού

$$x_Δ = (2N+1)\cdot\frac{λ}{4}, \quad N=0,1,2,\ldots$$

και αφού πρόκειται για τον τρίτο δεσμό είναι N=2.

Οπότε είναι:

$$x_Δ = (2\cdot 2+1)\frac{λ}{4} \Rightarrow \underline{x_Δ = \frac{5λ}{4}} \text{ και}$$

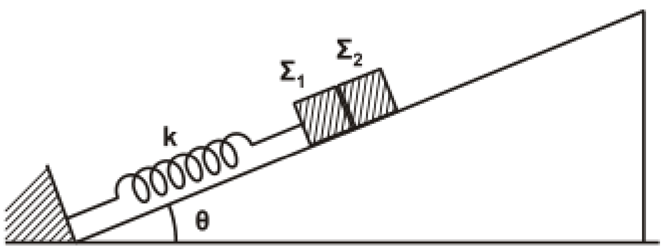
$$x = \frac{5λ}{4} + \frac{λ}{12} \Rightarrow x = \frac{15λ}{12} + \frac{λ}{12} \Rightarrow x = \frac{16λ}{12} \Rightarrow \underline{x = \frac{4λ}{3}}$$

Άρα από τη σχέση (1) θα έχουμε:

$$A' = 2A\left|συν\left(\frac{2π}{λ}\cdot\frac{4λ}{3}\right)\right| = 2A\left|συν\left(\frac{8π}{3}\right)\right| \Rightarrow A' = 2A\left|συν\left(2π + \frac{2π}{3}\right)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' = 2A\left|συν\left(\frac{2π}{3}\right)\right| = 2A\left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow A' = 2A\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{A' = A}}$$

Β3. Σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ είναι τοποθετημένα δύο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, που εφάπτονται μεταξύ τους. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

Μετακινώντας τα δύο σώματα προς τα κάτω, το σύστημα τίθεται σε ταλάντωση πλάτους Α. Η συνθήκη για να μην αποχωριστεί το Σ_1 από το Σ_2 είναι:

i) $A \cdot k < (m_1 + m_2) g\, ημθ$

ii) $A \cdot k > (m_1 + m_2) g\, ημθ$

iii) $A \cdot k > (m_1 + m_2)^2 g\, ημθ$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες

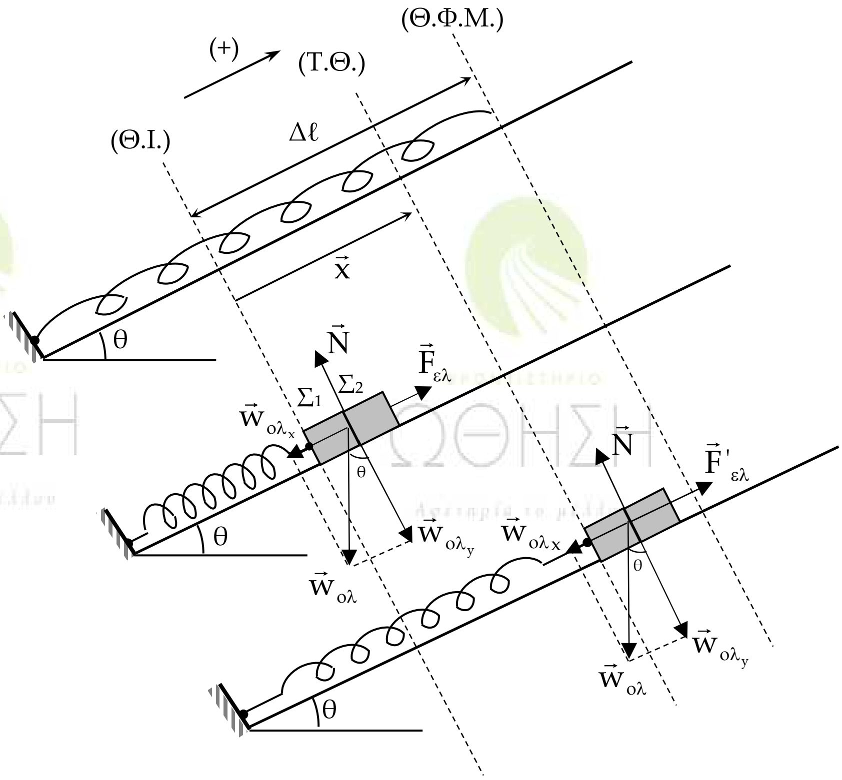
β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σωστή απάντηση είναι η **i).**

β) Αιτιολόγηση:



Για την ταλάντωση του συστήματος ισχύει:

$$\underline{Θ.Ι.}:\ \Sigma\vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{w}_{ολ_x} = \vec{0} \Rightarrow -w_{ολ_x} + F_{ελ} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\cdot g \cdot ημφ = k \cdot \Delta\ell \ (1)$$

$$\underline{Τ.Θ.}:\ \Sigma\vec{F}_x = \vec{F}'_{ελ} + \vec{w}_{ολ_x} \Rightarrow \Sigma F_x = +k\cdot(\Delta\ell - x) - (m_1 + m_2)\cdot g \cdot ημθ \Rightarrow$$

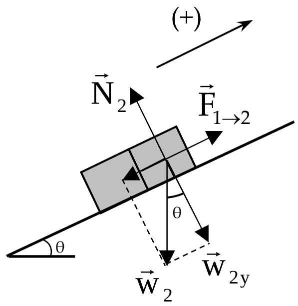
$$\Rightarrow \Sigma F_x = +k\cdot\Delta\ell - k\cdot x - (m_1 + m_2)\cdot g\cdot ημθ \overset{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F_x = +k\cdot\Delta\ell - k\cdot x - k\Delta\ell \Rightarrow \underline{\Sigma F_x = -k\cdot x}$$

Άρα, το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. με

$$D = k \Rightarrow k = (m_1 + m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}}\ (2)$$

Τα σώματα $m_1 - m_2$ είναι σε επαφή. Για τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του m_2 ισχύει:

$$D_2 = m_2 \cdot \omega^2 \Rightarrow \underline{D_2 = m_2 \cdot \frac{k}{m_1+m_2}} \;(3)$$



Το σώμα μάζας m_2 δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα. Για τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_{2x} = \vec{F}_{1\to2} + \vec{w}_{2x} \Rightarrow \vec{F}_{1\to2} = \Sigma\vec{F}_{2x} - \vec{w}_{2x} \Rightarrow \underline{F_{1\to2} = -D_2 \cdot x + m_2 \cdot g \cdot \eta\mu\varphi} \;(4)$$

Για να μην αποχωριστεί το σώμα Σ1 από το σώμα Σ2 πρέπει η δύναμη επαφής τους $\vec{F}_{1\to2}$ να υπάρχει, δηλαδή να είναι $F_{1\to2} > 0$.

Άρα, από την (4) και για $x = +A$, θα έχουμε:

$$-D_2 \cdot A + m_2 \cdot g \cdot \eta\mu\varphi > 0 \Rightarrow D_2 \cdot A < m_2 \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \overset{(3)}{\Rightarrow} \Rightarrow m_2 \cdot \frac{k}{m_1+m_2} \cdot A < m_2 \cdot g \cdot \eta\mu\varphi$$

$$\Rightarrow A < \frac{(m_1+m_2)\cdot g \cdot \eta\mu\varphi}{k} \quad \acute{\eta} \quad \underline{\underline{A \cdot k < (m_1+m_2)\cdot g \cdot \eta\mu\varphi}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Ιδανικός πυκνωτής χωρητικότητας C είναι φορτισμένος σε τάση V = 40V. Τη χρονική στιγμή t = 0s συνδέεται με ιδανικό πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L και το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η ενέργεια U_E του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, σε συνάρτηση με την ένταση i του ρεύματος, στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση $U_E = 8\cdot10^{-2}(1-i^2)$ (SI)

Γ1. Να υπολογίσετε την περίοδο T των ηλεκτρικών ταλαντώσεων του κυκλώματος.

Μονάδες 8

Γ2. Να υπολογίσετε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t = T/12.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα κάθε φορά που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή γίνεται τριπλάσια της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

Μονάδες 6

Γ4. Να γράψετε τη συνάρτηση f που συνδέει το τετράγωνο του φορτίου του πυκνωτή με το τετράγωνο της έντασης του ρεύματος από το οποίο διαρρέεται το πηνίο, $q^2 = f(i^2)$ (μονάδες 2), και να την παραστήσετε γραφικά (μονάδες 4).

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας σε ηλεκτρική ταλάντωση θα έχουμε:

$$E_{ολ.} = U_B + U_E = σταθ. \Rightarrow U_E = E_{ολ.} - U_B \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}L\cdot I^2 - \frac{1}{2}L\cdot i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{U_E = \frac{1}{2}L\left(I^2 - i^2\right)} \quad (1)$$

Με σύγκριση της δοσμένης σχέσης και της σχέσης (1) θα πάρουμε:

$$\frac{1}{2}L = 8\cdot 10^{-2}\ H \text{ ή } \underline{L = 16\cdot 10^{-2}\ H} \quad \text{και} \quad I^2 = 1A^2 \text{ ή } \underline{I = 1A}$$

Για τη χωρητικότητα του πυκνωτή θα έχουμε:

$$U_{B_{(max)}} = U_{E_{(max)}} \Rightarrow \frac{1}{2}L\cdot I^2 = \frac{Q^2}{2C},$$

αλλά $Q = C\cdot V$, οπότε:

$$\frac{1}{2}L\cdot I^2 = \frac{C^2\cdot V^2}{2C} \Rightarrow \frac{1}{2}L\cdot I^2 = \frac{1}{2}C\cdot V^2 \Rightarrow L\cdot I^2 = C\cdot V^2 \Rightarrow C = \frac{L\cdot I^2}{V^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{16\cdot 10^{-2}\cdot 1}{16\cdot 10^{-2}}\ F \Rightarrow \underline{C = 10^{-4}\ F}$$

Άρα για την περίοδο θα έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{16\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}}\ \sec \Rightarrow \underline{\underline{T = 8\pi\cdot 10^{-3}\ \sec}}$$

Γ2. Γενικά ισχύουν οι σχέσεις

$q = Q\cdot ημ(ωt + φ_0)$ (2)

$i = I\cdot συν(ωt + φ_0)$ (3),

όπου $ω = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8\pi\cdot 10^{-3}} r/s \Rightarrow \underline{ω = 250 r/s}$,

$I = 1A$ και $Q = C\cdot V \Rightarrow Q = 10^{-4}\cdot 4\cdot 10 C \Rightarrow \underline{Q = 4\cdot 10^{-3} C}$

Για την αρχική φάση θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{t=0}:\ q = +Q \overset{(2)}{\Rightarrow} Q = Q\cdot ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1 \\ i = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} 0 = I\cdot συνφ_0 \Rightarrow συνφ_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{φ_0 = \frac{\pi}{2} rad}$$

Οπότε είναι

$$q = Q\cdot ημ(ωt + \frac{\pi}{2}) \quad \text{ή} \quad \underline{q = Q\cdot συν(ωt)} \quad (4)$$

$$i = I\cdot συν(ωt + \frac{\pi}{2}) \quad \text{ή} \quad \underline{i = -I\cdot ημ(ωt)} \quad (5)$$

Η σχέση (4) για $t=\dfrac{T}{12}$ θα δώσει

$$q=Q\cdot συν(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12})\Rightarrow q=Q\cdot συν(\frac{\pi}{6})\Rightarrow \underline{q=Q\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\cdot10^{-3}C}$$

Οπότε θα είναι:

$$U_E=\frac{q^2}{2C}=\frac{4\cdot3\cdot10^{-6}}{2\cdot10^{-4}}J\Rightarrow \underline{\underline{U_E=6\cdot10^{-2}J}}$$

Γ3. Σύμφωνα με την Α.Δ.Ε.Η.Τ. θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}E_{ολ}=U_B+U_E=σταθ\\ U_E=3U_B \text{ ή } U_B=\dfrac{U_E}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow E_{ολ}=U_E+\frac{U_E}{3}\Rightarrow E_{ολ}=\frac{4U_E}{3}\Rightarrow\frac{Q^2}{2C}=\frac{4}{3}\frac{q^2}{2C}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2=\frac{3}{4}Q^2\Rightarrow \underline{|q|=\frac{Q\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\cdot10^{-3}\,C}$$

Σύμφωνα με το 2ο κ.Κ. θα έχουμε

$$V_L=V_C\Rightarrow E_{αυτ.}=V_L\Rightarrow -L\frac{di}{dt}=\frac{q}{C}\Rightarrow\frac{di}{dt}=-\frac{1}{LC}\cdot q\xrightarrow{\omega^2=\frac{1}{LC}}\underline{\frac{di}{dt}=-\omega^2 q}\quad \text{και}$$

$$\left|\frac{di}{dt}\right|=\omega^2|q|=250\cdot250\cdot\frac{2\sqrt{3}}{1000}\,A/s\Rightarrow\underline{\underline{\left|\frac{di}{dt}\right|=125\sqrt{3}\,A/s}}$$

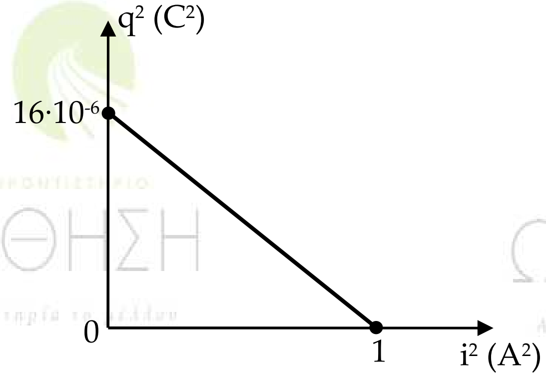
Γ4. Σύμφωνα με την Α.Δ.Ε.Η.Τ. θα πάρουμε

$$E_{ολ}=U_B+U_E=σταθ\Rightarrow\frac{Q^2}{2C}=\frac{q^2}{2C}+\frac{1}{2}Li^2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}Q^2=q^2+L\cdot C\cdot i^2\\ LC=\dfrac{1}{\omega^2}\end{array}\right\}\Rightarrow Q^2=q^2+\frac{i^2}{\omega^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{q^2=Q^2-\frac{1}{\omega^2}\cdot i^2}\quad \text{ή}\quad \underline{q^2=16\cdot10^{-6}-16\cdot10^{-6}\cdot i^2}\ \ (SI)$$

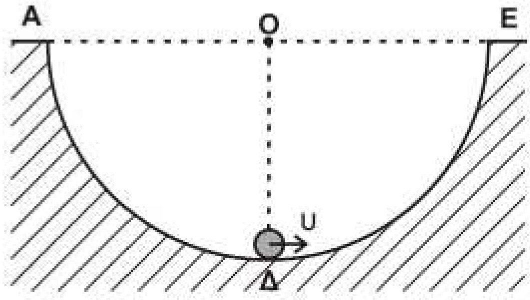
όπου $\underline{-1A\le i\le 1A}$

Το γράφημα είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\underline{-16\cdot10^{-6}\,\dfrac{C^2}{A^2}}$



ΘΕΜΑ Δ

Από το εσωτερικό άκρο Α ενός ημισφαιρίου ακτίνας R = 16m αφήνεται να κυλήσει μία συμπαγής μικρή σφαίρα μάζας m = 1,4Kg και ακτίνας r = R/8. Το ημισφαίριο είναι βυθισμένο στο έδαφος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, και η κίνηση της σφαίρας γίνεται χωρίς ολίσθηση.



Σχήμα 4

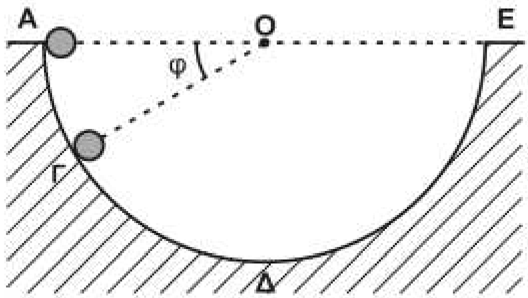
Δ1. Να εκφράσετε τη στατική τριβή T_s που ασκείται στη σφαίρα σε συνάρτηση με το συνημίτονο της γωνίας φ που σχηματίζει η ακτίνα ΟΓ του ημισφαιρίου με την ευθεία ΑΕ της επιφάνειας του εδάφους.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο Γ όπου $\varphi = 30^o$ (Σχήμα 3).

Μονάδες 6

Μια άλλη σφαίρα, όμοια με την προηγούμενη, εκτοξεύεται από το κατώτατο σημείο Δ του ημισφαιρίου με ταχύτητα υ = 6m/s και κυλίεται χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό του με κατεύθυνση το άκρο Ε (Σχήμα 4).



Σχήμα 3

Δ3. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια του εδάφους που θα φτάσει η σφαίρα κατά την κίνησή της

Μονάδες 7

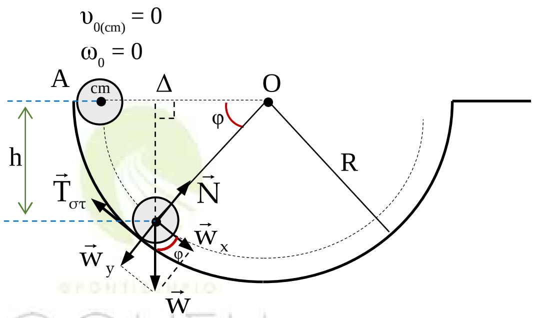
Δ4. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας (μονάδες 4)και το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας (μονάδες 2),αμέσως μόλις αυτή χάσει την επαφή με την επιφάνεια του ημισφαιρίου στο σημείο Ε.

Μονάδες 6

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Για τη σφαίρα ισχύει:



$$\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{T(cm)} \Rightarrow w_x - T_{\sigma\tau} = m\cdot\alpha_{T(cm)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_{\sigma\tau} = m\cdot\alpha_{T(cm)} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot r = \frac{2}{5}mr^2\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}mr\cdot\alpha_\gamma \\ \text{λόγω της Κ.Χ.Ο. της σφαίρας } \alpha_{T(cm)} = r\cdot\alpha_\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}ma_{T(cm)} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2):

$$\frac{mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_{\sigma\tau}}{T_{\sigma\tau}} = \frac{m\alpha_{cm}}{\frac{5}{2}m\alpha_{cm}} \Rightarrow \frac{mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_{\sigma\tau}}{T_{\sigma\tau}} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2mg\sigma\upsilon\nu\varphi - 2T_{\sigma\tau} = 5T_{\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_{\sigma\tau} = \frac{2}{7}mg\sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

Επομένως $T_{\sigma\tau} = \frac{2}{7}\cdot 1{,}4\cdot 10\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \;\; (SI) \Rightarrow \underline{\underline{T_{\sigma\tau} = 4\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\ (SI)}}$,με $\underline{0 \le \varphi \le \pi \text{ rad}}$

Δ2. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από το Α στο Γ.

$$\left.\begin{array}{l}K_{\tau\varepsilon\lambda(\Gamma)} - K_{\alpha\rho\chi(A)} = W_N + W_w + W_{T_{\sigma\tau}} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm_\Gamma} + \frac{1}{2}I\omega^2_\Gamma - 0 = 0 + mg\cdot\Delta h + 0 \\ \text{όμως στο } \Delta\hat{\Gamma}O: \eta\mu\varphi = \frac{\Delta h}{R-r} \Rightarrow \Delta h = (R-r)\eta\mu\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2_{cm_\Gamma} + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2_\Gamma = mg(R-r)\cdot\eta\mu\varphi \underset{\omega_\Gamma\cdot r = \upsilon_{cm_\Gamma}}{\overset{\text{Λόγω κ.χ.ο}}{\Rightarrow}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \frac{7}{10}\upsilon^2_{cm_\Gamma} = g(R-r)\cdot\eta\mu\varphi \Rightarrow \upsilon_{cm_\Gamma} = \sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)\eta\mu\varphi} \\ \text{Για } \varphi = 30^o\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{\upsilon_{cm_\Gamma} = \sqrt{10}\ m/s}}$$

Στο σημείο Γ ισχύει:

$$\Sigma F_{\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\kappa\acute{\alpha}} = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau.} \Rightarrow N - w_y = m\frac{\upsilon^2_{cm_\Gamma}}{R-r} \Rightarrow N - mg\eta\mu\varphi = m\frac{\upsilon^2_{cm_\Gamma}}{R-r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{N = mg\eta\mu\varphi + m\frac{\upsilon^2_{cm_\Gamma}}{R-r}}} \Rightarrow \underline{\underline{N = 17\,N}}$$

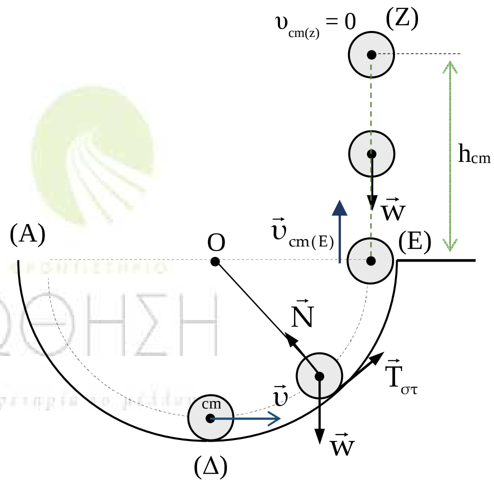
Δ3. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σφαίρα από Δ ως το Ε.

$$K_{τελ.(Ε)} - K_{αρχ.(Δ)} = W_w + W_N + W_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} m\upsilon^2_{cm(E)} - \frac{7}{10} m\upsilon^2 = -mg\cdot(R-r) + 0 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2_{cm(E)} = \upsilon^2 - \frac{10}{7} g\cdot(R-r)$$

$$\Rightarrow \upsilon_{cm(E)} = \sqrt{\upsilon^2 - \frac{10}{7} g\cdot(R-r)} \Rightarrow \underline{\upsilon_{cm(E)} = 4\,m/s}$$



Στη συνέχεια η σφαίρα κινείται υπό την επίδραση μόνο του βάρους της εκτελώντας σύνθετη κίνηση. Επομένως

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha'_{\gamma} \Rightarrow 0 = I\cdot\alpha'_{\gamma} \Rightarrow \alpha'_{\gamma} = 0 \Rightarrow \omega = σταθ. \text{ ή}$$

$$\omega_{(Z)} = \omega_{(E)}$$

Στη θέση Ζ (μέγιστο ύψος) θα είναι $\upsilon_{cm(Z)} = 0$

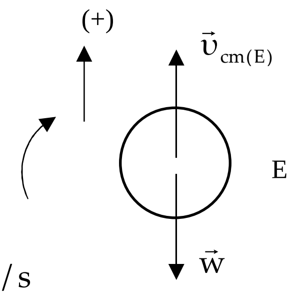
Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σφαίρα από το Ε στο Ζ.

$$K_{τελ.(Z)} - K_{αρχ.(E)} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(Z)} + \frac{1}{2} I\omega^2_{(Z)} - \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} - \frac{1}{2} I\omega^2_{(E)} = -mgh_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2} I\omega^2_{(E)} - \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} - \frac{1}{2} I\omega^2_{(E)} = -mgh_{cm} \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{cm(E)} = mgh_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h_{cm} = \frac{\upsilon^2_{cm(E)}}{2g}} \Rightarrow \underline{\underline{h_{cm} = 0{,}8\,m}}$$

Δ4. Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει:



$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{μετ}}{dt} + \frac{dK_{περ}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} + \frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon_{cm(E)} + \Sigma\tau\cdot\omega_{(E)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -mg\upsilon_{cm(E)} + 0\cdot\omega_{(E)} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dK}{dt} = -mg\upsilon_{cm(E)} = -56\,J/s}}$$

Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας κατά τον άξονα περιστροφής της ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{cm} = \tau_{m\vec{g}} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{dL}{dt} = 0}}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα Φυσικής Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της εξεταστέας ύλης. Κρίνονται πολύ απαιτητικά, πρωτότυπα και δημιουργούν τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τη διάκριση των υποψηφίων ανάλογα με τις δυνατότητές τους.

Το θεωρητικό θέμα Α απαιτούσε από τους υποψηφίους κυρίως τη δυνατότητα αναπαραγωγής. Το θέμα Β απαιτούσε από τους υποψηφίους δυνατότητα αναπαραγωγής της θεωρίας, κριτική ικανότητα, αρκετή εμπειρία αλλά και άνεση στο χειρισμό των φυσικών νόμων που διέπουν κάποια χαρακτηριστικά μηχανικά συστήματα.

Τα προβλήματα (Θέματα Γ και Δ) απαιτούσαν καλή γνώση της θεωρίας, ευρηματικότητα και αρκετή έμπνευση από τους υποψηφίους για την αποτελεσματική αντιμετώπισή τους.

Συνεπώς τα σημερινά θέματα είναι ποιοτικά, σαφή, με σχετικά μεγάλη έκταση, τα οποία μπορούν να αντιμετωπιστούν επαρκώς μόνο από κάποιους πολύ καλά προετοιμασμένους, ψύχραιμους και προσεκτικούς υποψηφίους.