ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2012

Επιμέλεια:
Ομάδα Φυσικών της Ώθησης

Παρασκευή, 25 Μαΐου 2012
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ

ΘΕΜΑ Α

Στις ημιτελείς προτάσεις **Α1-Α4** *να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία τη συμπληρώνει σωστά.*

Α1. Κατά τη διάρκεια μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης

α. έχουμε πάντα συντονισμό.

β. η συχνότητα ταλάντωσης δεν εξαρτάται από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης.

γ. για δεδομένη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει σταθερό.

δ. η ενέργεια που προσφέρεται στο σώμα δεν αντισταθμίζει τις απώλειες.

Μονάδες 5

Α2. Η ταχύτητα διάδοσης ενός αρμονικού κύματος εξαρτάται από

α. τη συχνότητα του κύματος.

β. τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης.

γ. το πλάτος του κύματος.

δ. την ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του μέσου διάδοσης.

Μονάδες 5

Α3. Σε κύκλωμα LC που εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις η ολική ενέργεια είναι

α. ανάλογη του φορτίου του πυκνωτή.

β. ανάλογη του ημ^2(LCt).

γ. σταθερή.

δ. ανάλογη της έντασης του ρεύματος.

Μονάδες 5

Α4. Στο φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

α. οι ακτίνες Χ έχουν μεγαλύτερο μήκος κύματος από τα ραδιοκύματα και μεγαλύτερη συχνότητα από το υπέρυθρο.

β. το ερυθρό φως έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος από το πράσινο φως και μεγαλύτερη συχνότητα από τις ακτίνες Χ.

γ. τα μικροκύματα έχουν μικρότερο μήκος κύματος από τα ραδιοκύματα και μικρότερη συχνότητα από το υπεριώδες.

δ. το πορτοκαλί φως έχει μικρότερο μήκος κύματος από τις ακτίνες Χ και μεγαλύτερη συχνότητα από το υπεριώδες.

Μονάδες 5

Α5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Βασιζόμενοι στο φαινόμενο Doppler μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ταχύτητα ενός άστρου σε σχέση με τη Γη.

β. Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων ο κύριος λόγος απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής μετριέται σε $Kg \cdot \frac{m^2}{s}$.

δ. Σε στερεό σώμα που εκτελεί στροφική κίνηση και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας αυξάνεται, τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης είναι αντίρροπα.

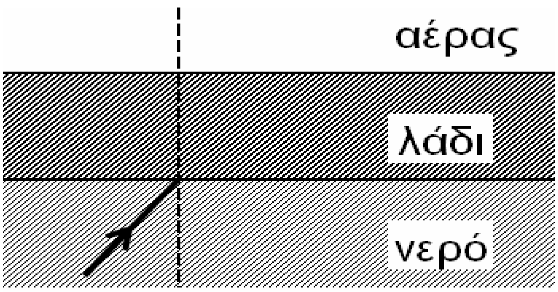
ε. Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσοτέρων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται συμβολή.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. → γ.
Α2. → β.
Α3. → γ.
Α4. → γ.
Α5. → α. → **Σωστό**
β. → **Σωστό**
γ. → **Λάθος**
δ. → **Λάθος**
ε. → **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β



Β1. Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός, προερχόμενη από πηγή που βρίσκεται μέσα στο νερό, προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια νερού – αέρα υπό γωνία ίση με την κρίσιμη. Στην επιφάνεια του νερού ρίχνουμε στρώμα λαδιού το οποίο δεν αναμιγνύεται με το νερό, έχει πυκνότητα μικρότερη από το νερό και δείκτη διάθλασης μεγαλύτερο από το δείκτη διάθλασης του νερού. Τότε η ακτίνα

α. θα εξέλθει στον αέρα
β. θα υποστεί ολική ανάκλαση
γ. θα κινηθεί παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια λαδιού – αέρα.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση (μονάδες 2).
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 6).

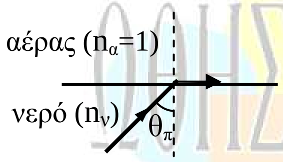
Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i) Σωστή είναι η γ.

ii) **Αιτιολόγηση:**

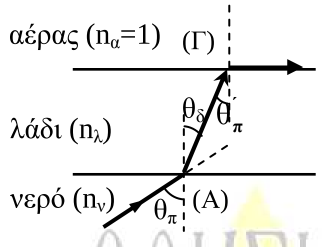
Αρχικά



Είναι $\theta_\pi = \theta_{cr} \Rightarrow \eta\mu\theta_\pi = \eta\mu\theta_{cr} = \dfrac{1}{n_\nu}$ **(1)**

Τελικά

Ισχύει: $n_\lambda > n_\nu \Rightarrow \upsilon_\lambda < \upsilon_\nu$, δηλαδή πρόκειται για διάδοση από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο μέσο. Άρα ο Νόμος του Snell στο σημείο (Α) (νερό → λάδι) δίνει



$$n_\nu \cdot \eta\mu\theta_\pi = n_\lambda \cdot \eta\mu\theta_\delta \overset{(1)}{\Rightarrow} n_\nu \cdot \frac{1}{n_\nu} = n_\lambda \cdot \eta\mu\theta_\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_\lambda \cdot \eta\mu\theta_\delta = 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_\delta = \frac{1}{n_\lambda} \quad \textbf{(2)},$$

όμως $\theta'_\pi = \theta_\delta$ (ως εντός εναλλάξ) $\Rightarrow \eta\mu\theta'_\pi = \eta\mu\theta_\delta$, οπότε με βάση και τη σχέση (2)

$$\boxed{\eta\mu\theta'_\pi = \frac{1}{n_\lambda}} \quad \textbf{(3)}$$

Θα εξετάσουμε τί συμβαίνει στο σημείο (Γ) (λάδι → αέρας). Η κρίσιμη γωνία θ'_{cr} για διάδοση της ακτίνας από το λάδι στον αέρα καθορίζεται ως εξής:

$$n_\lambda \cdot \eta\mu\theta'_{cr} = n_\alpha \cdot \eta\mu 90^o \Rightarrow \boxed{\eta\mu\theta'_{cr} = \frac{1}{n_\lambda}} \quad \textbf{(4)}$$

Οπότε από (3), (4) $\Rightarrow \eta\mu\theta'_\pi = \eta\mu\theta'_{cr} \Rightarrow \theta'_\pi = \theta'_{cr} \rightarrow$ *η ακτίνα θα διαδοθεί παράλληλα στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα - λαδιού.*

Β2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο, κατά μήκος του ημιάξονα Οx, δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση x=0. Δύο σημεία Κ και Λ του ελαστικού μέσου βρίσκονται αριστερά και δεξιά του πρώτου δεσμού, μετά τη θέση x=0, σε αποστάσεις $\dfrac{\lambda}{6}$ και $\dfrac{\lambda}{12}$ από αυτόν αντίστοιχα, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα. Ο λόγος των μεγίστων ταχυτήτων $\dfrac{\upsilon_K}{\upsilon_\Lambda}$ των σημείων αυτών είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** $\dfrac{1}{3}$ **γ.** 3

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 6).

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

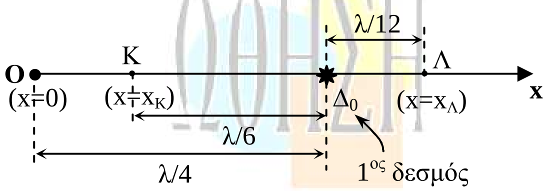
i) Σωστή είναι η **α**.

ii) **Αιτιολόγηση:**

Με βάση το σχήμα οι θέσεις των Κ, Λ σε σχέση με την αρχή των αξόνων (κοιλία στο x=0) είναι:

$$K \rightarrow x_K = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \Rightarrow \boxed{x_K = \frac{\lambda}{12}}$$

$$\Lambda \rightarrow x_\Lambda = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow \boxed{x_K = \frac{\lambda}{3}}$$



Σύμφωνα με τη σχέση $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{x}{\lambda})\right|$, για τα πλάτη των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ θα έχουμε:

$$|A'_K| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{x_K}{\lambda})\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6})\right| = 2A\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{A\sqrt{3}}}$$

$$|A'_\Lambda| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda})\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3})\right| = 2A\frac{1}{2} = \underline{\underline{A}}$$

Επομένως για το λόγο των μεγίστων ταχυτήτων ($u_{max} = \omega\cdot|A'|$) έχουμε:

$$\frac{\upsilon_{K(max)}}{\upsilon_{\Lambda(max)}} = \frac{\omega\cdot|A'_K|}{\omega\cdot|A'_\Lambda|} = \frac{A\sqrt{3}}{A} \Rightarrow \boxed{\frac{\upsilon_{K(max)}}{\upsilon_{\Lambda(max)}} = \sqrt{3}}$$

Β3. Ανάμεσα σε δύο παράλληλους τοίχους ΑΓ και ΒΔ, υπάρχει λείο οριζόντιο δάπεδο. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι κάθετα στους τοίχους. Σφαίρα Σ_1 κινείται πάνω στο δάπεδο, με σταθερή ταχύτητα, μέτρου υ, παράλληλη στους τοίχους, και καλύπτει τη διαδρομή από το ΑΒ μέχρι το ΓΔ σε χρόνο t_1. Στη συνέχεια δεύτερη σφαίρα Σ_2 που έχει ταχύτητα μέτρου υ συγκρούεται ελαστικά με τον ένα τοίχο υπό γωνία φ=60° και, ύστερα από διαδοχικές ελαστικές κρούσεις με τους τοίχους, καλύπτει τη διαδρομή από το ΑΒ μέχρι το ΓΔ σε χρόνο t_2. Οι σφαίρες εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση.

Τότε θα ισχύει:

α. $t_2 = 2t_1$ **β.** $t_2 = 4t_1$ **γ.** $t_2 = 8t_1$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση (μονάδες 2).

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας (μονάδες 7).

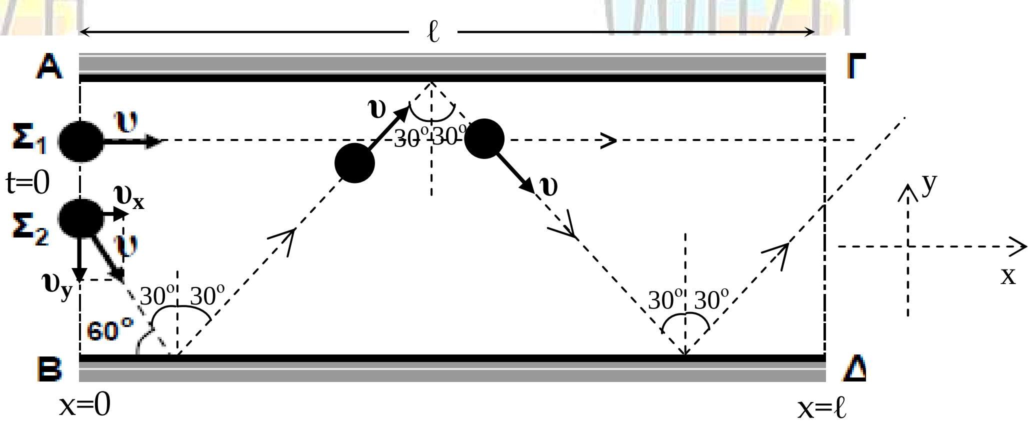
Δίνονται: $ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν60^o = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i) Σωστή είναι η ***α***.

ii) **Αιτιολόγηση:**



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι τροχιές που θα διαγράψουν τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$.

1ος τρόπος

Για το σώμα $Σ_1$ που εκτελεί Ευθύγραμμη Ομαλή Κίνηση ισχύει:

$$x_1 = υ \cdot t \underset{t=t_1}{\overset{x_1=\ell}{\Rightarrow}} \ell = υ \cdot t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\ell}{υ}} \quad (1)$$

Για το σώμα $Σ_2$:

Αφού το σώμα αυτό συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με τα τοιχώματα ΒΔ και ΑΓ, πριν και μετά από κάθε κρούση το μέτρο της ταχύτητάς του θα έχει την ίδια τιμή, ενώ για τις γωνίες πρόσπτωσης ($\hat{π}$) και ανάκλασης ($\hat{α}$) θα ισχύει $\hat{π}=\hat{α}=30^o$. Επίσης, η ταχύτητα $\vec{υ}_x$ κατά τη διεύθυνση ΒΔ θα παραμένει σταθερή, γιατί κατά την κρούση με το τοίχωμα διαφοροποιείται μόνο η κατεύθυνση της $\vec{υ}_ψ$, επειδή η δύναμη επαφής σε κάθε κρούση είναι κάθετη στο αντίστοιχο τοίχωμα.

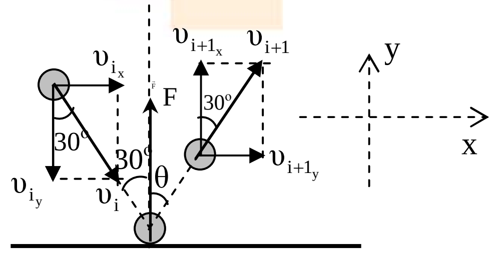
Σύμφωνα με την *Αρχή της Ανεξαρτησίας των Κινήσεων* η μετατόπιση του σώματος $Σ_2$ κατά τη διεύθυνση του άξονα x'x οφείλεται μόνο στην συνιστώσα ταχύτητας $\vec{υ}_x$ και δίνεται από τη σχέση:

$$x_2 = υ_x \cdot t \underset{t=t_2}{\overset{x_2=\ell}{\Rightarrow}} \ell = υ \cdot συν60^0 \cdot t_2 \Rightarrow \ell = υ \cdot \frac{1}{2} \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{2\ell}{υ} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{t_2 = 2t_1}$$

2ος τρόπος

Το $Σ_1$ εκτελεί Ε.Ο.Κ. και σε χρόνο t_1 διατρέχει διάστημα (ΑΓ)=(ΒΔ)=$\boldsymbol{\ell}$, άρα

$$\ell = υt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\ell}{υ} \quad \textbf{(1)}$$



Η κάθε κρούση του σφαιριδίου $Σ_2$ με τους παράλληλους τοίχους ΑΓ και ΓΔ είναι ελαστική. Άρα θα ισχύει

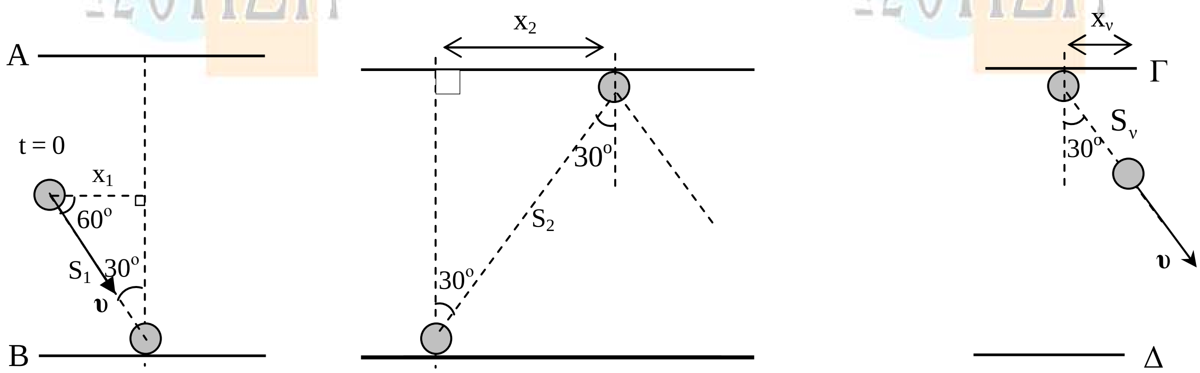
$$K_{αρχ} = K_1 = K_2 = ...K_ν \Rightarrow \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}mυ_2^2 = ... = \frac{1}{2}mυ_ν^2 \Rightarrow |\vec{υ}_1| = |\vec{υ}_2| = ... = |\vec{υ}_ν| = υ,$$

όπου $\vec{υ}_i$ (i=1,2….ν) η ταχύτητα του $Σ_2$ μετά την i τάξης κρούση.

Ακόμα για το $Σ_2$ σε κάθε κρούση τόσο με τον τοίχο ΒΔ όσο και με τον ΑΓ έχουμε:

$$Δ\vec{p}_x = \sum \vec{F}_X \cdot Δt_{Κρ.} \xrightarrow{Δt_{Κρ.} \approx 0} Δ\vec{p}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{x(Α.Μ.)} - \vec{p}_{x(Λ.Π.)} = \vec{0} \Rightarrow mυημθ - mυημ30^0 = 0 \overset{mυ\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow ημθ = ημ30^0 \Rightarrow \hat{θ} = 30^0$$



Από τη στιγμή της εκκίνησης μέχρι την πρώτη κρούση

Μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων

Από τη ν τελευταία κρούση μέχρι την έξοδο

Αν S_1 είναι η απόσταση που διατρέχει το $Σ_2$ από τη στιγμή t = 0 μέχρι την πρώτη κρούση, θα ισχύει

$$ημ30^0 = \frac{x_1}{S_1} \Rightarrow S_1 = \frac{x_1}{ημ30^0}$$

Ομοίως, αν S_2 είναι το διάστημα που διατρέχει το $Σ_2$ μεταξύ πρώτης και δεύτερης κρούσης, θα έχουμε:

$$ημ30^0 = \frac{x_2}{S_2} \Rightarrow S_2 = \frac{x_2}{ημ30^0}$$

Άρα, αν $S_{ν-1}$ είναι το διάστημα που διατρέχει το $Σ_2$ μεταξύ της (ν-1) και της νιοστής κρούσης, θα ισχύει

$$ημ30^0 = \frac{x_{ν-1}}{S_{ν-1}} \Rightarrow S_{ν-1} = \frac{x_{ν-1}}{ημ30^0}$$

Ακόμα, αν $S_ν$ είναι το διάστημα που διέτρεξε το $Σ_2$ μεταξύ της νιοστής κρούσης και της θέσης εξόδου, θα έχουμε

$$S_ν = \frac{x_ν}{ημ30^0}$$

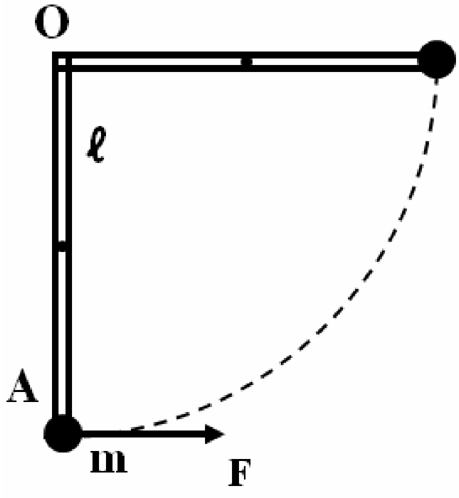
Άρα το σώμα $Σ_2$ κινούμενο με ταχύτητα μέτρου υ διέτρεξε διάστημα

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_ν \Rightarrow S = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_ν}{ημ30^0} \Rightarrow S = \frac{(ΑΓ)}{1/2} \Rightarrow S = 2(ΑΓ) = 2\ell$$

σε χρόνο t_2 για τον οποίο ισχύει:

$$S = υ \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{S}{υ} \Rightarrow t_2 = \frac{2\ell}{υ} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{t_2 = 2t_1}$$

ΘΕΜΑ Γ



Ομογενής και ισοπαχής δοκός (ΟΑ), μάζας M=6Kg και μήκους ℓ=0,3 m, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο της άκρο Α υπάρχει στερεωμένη μικρή σφαίρα μάζας $m = \frac{M}{2}$.

Γ1. Βρείτε την ροπή αδράνειας του συστήματος δοκού-σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής του.

Μονάδες 6

Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F = \frac{120}{\pi}N$, που είναι συνεχώς κάθετη στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Γ2. Βρείτε το έργο της δύναμης F κατά την περιστροφή του συστήματος μέχρι την οριζόντια θέση της.

Μονάδες 6

Γ3. Βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκού - σφαίρας στην οριζόντια θέση.

Μονάδες 6

Επαναφέρουμε το σύστημα δοκού – σφαίρας στην αρχική κατακόρυφη θέση του. Ασκούμε στο άκρο Α δύναμη, σταθερού μέτρου $F' = 30\sqrt{3}N$, που είναι συνεχώς κάθετη στη δοκό.

Γ4. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφο τη στιγμή που η κινητική της ενέργεια γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 7

Δίνονται: $g = 10m/s^2$, ροπή αδράνειας ομογενούς δοκού μάζας Μ και μήκους ℓ, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν $I_{CM} = \frac{1}{12}M\cdot\ell^2$, $\eta\mu60^o = \sigma\upsilon\nu30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu30^o = \sigma\upsilon\nu60^o = \frac{1}{2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Steiner, η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το Ο και κάθετο στο επίπεδο κίνησης της ράβδου είναι

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{4} \Rightarrow I_O = \frac{M\ell^2}{3}$$

Αντίστοιχα η ροπή αδράνειας της σημειακής μάζας m ως προς τον προηγούμενο άξονα είναι

$$I_m = m(AO)^2 \Rightarrow I_m = \frac{M}{2}\ell^2$$

Άρα η ροπή αδράνειας του συστήματος (σύνθετο στερεό) ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Ο είναι

$$I = I_\rho + I_m \Rightarrow I = \frac{M\ell^2}{3} + \frac{M\ell^2}{2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{5}{6}M\ell^2} \Rightarrow \boxed{I = 0{,}45Kg \cdot m^2}$$

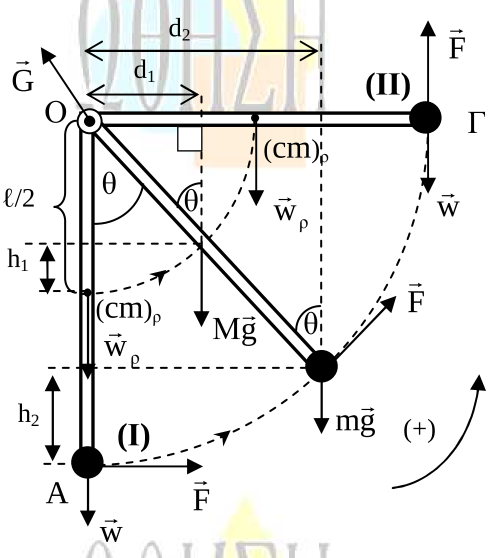
Γ2. Για το έργο της $\vec{F}$ που πραγματοποιείται μέσω της ροπής της θα έχουμε

$$W_F = \tau_F \cdot \theta_{(rad)} = F \cdot \ell \cdot \theta \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \boxed{W_F = 18J}$$

Μια άλλη προσέγγιση:

Η $\vec{F}$ έχει σταθερό μέτρο και εφάπτεται διαρκώς της κυκλικής τροχιάς του σημείου εφαρμογής της. Άρα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} W_{\vec{F}} &= F \cdot (\overset{\frown}{A\Gamma}) \\ \text{όμως } (\overset{\frown}{A\Gamma}) &= \ell \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{\vec{F}} = \frac{F\ell}{2} \cdot \pi \Rightarrow \boxed{W_F = 18J}$$



Γ3. Για το σύστημα ράβδος-μικρή σφαίρα και τις θέσεις Ι, ΙΙ εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. προκύπτει

$$\Delta K = \sum W_{\vec{F}} \Rightarrow K - K_0 = W_{\vec{F}} + W_{\vec{w}} + W_{\vec{w}_\rho} \Rightarrow K - 0 = W_{\vec{F}} + W_{\vec{w}} + W_{\vec{w}_\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 = W_{\vec{F}} - mg\ell - Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 = (18 - 9 - 9)J \Rightarrow \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = 0}$$

Γ4. Η κινητική ενέργεια θα μεγιστοποιηθεί στη θέση θ = φ [φ∈(0,π/2)], όπου $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0}$, γιατί εκεί η γωνιακή επιτάχυνση θα αλλάξει φορά από ⦿ σε ⊗ και η αλγεβρική της τιμή θα περάσει από την τιμή μηδέν. Δηλαδή το σύνθετο στερεό θα εκτελέσει αρχικά στροφική επιταχυνόμενη κίνηση [$0 \le \theta < \varphi \rightarrow \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$] και μετά επιβραδυνόμενη [$\varphi < \theta \le \pi/2 \rightarrow \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$].

- Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση $\sum \tau_{(O)} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$, θα έχουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0 \Rightarrow \sum \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{F/O} + \tau_{w_\rho/O} + \tau_{w/O} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'\ell - Mgd_1 - mgd_2 = 0 \Rightarrow F'\ell - Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - \frac{M}{2}g\ell\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell\left(F' - \frac{M}{2}g\eta\mu\varphi - \frac{Mg}{2}\eta\mu\varphi\right) = 0 \overset{\ell \neq 0}{\Rightarrow} F' = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{F'}{Mg} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}r \;\; \text{ή} \;\; \boxed{\varphi = 60^0}$$

- *Μια άλλη προσέγγιση (με αρκετό διαφορικό λογισμό)*:

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ της θέσης **Ι** και μιας ενδιάμεσης (πλάγιας), θα έχουμε

$$K - 0 = W_{\vec{F}} + W_{\vec{w}} + W_{\vec{w}_\rho} \Rightarrow K = F'\ell\theta - mgh_2 - Mgh_1 = F'\ell\theta - \frac{M}{2}g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta) - Mg\frac{\ell}{2}(1-\sigma\upsilon\nu\theta) \Rightarrow$$

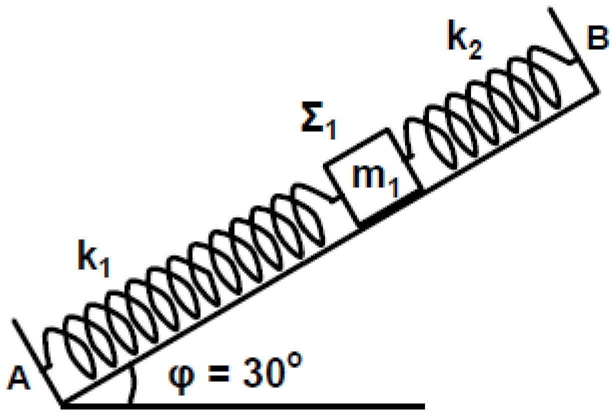
$$\Rightarrow \boxed{K = K(\theta) = F'\ell\theta + Mg\ell\sigma\upsilon\nu\theta - Mg\ell}$$

$$\text{και} \quad \frac{dK}{d\theta} = \frac{d(F'\ell\theta + Mg\ell\sigma\upsilon\nu\theta - Mg\ell)}{d\theta} \Rightarrow \frac{dK}{d\theta} = K'(\theta) = F'\ell - Mg\ell\eta\mu\theta$$

Για να έχουμε $K = K_{max}$ πρέπει

$$\frac{dK}{d\theta} = 0 \Rightarrow F'\ell - Mg\ell\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{F'}{Mg} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ή } \boxed{\theta = 60^0}$$

ΘΕΜΑ Δ



Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\phi=30^o$. Στα σημεία Α και Β στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές $k_1=60$ N/m και $k_2=140$ N/m αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα Σ_1, μάζας $m_1=2$ Kg και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Μονάδες 5

Δ2. Να γράψετε τη σχέση που δίνει την απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο. Να θεωρήσετε θετική φορά τη φορά από το Α προς το Β.

Μονάδες 7

Κάποια χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην αρχική του θέση, τοποθετούμε πάνω του (χωρίς αρχική ταχύτητα) ένα άλλο σώμα Σ_2 μικρών διαστάσεων μάζας $m_2=6$Kg. Το σώμα Σ_2 δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ_1 λόγω της τριβής που δέχεται από αυτό. Το σύστημα των δύο σωμάτων κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

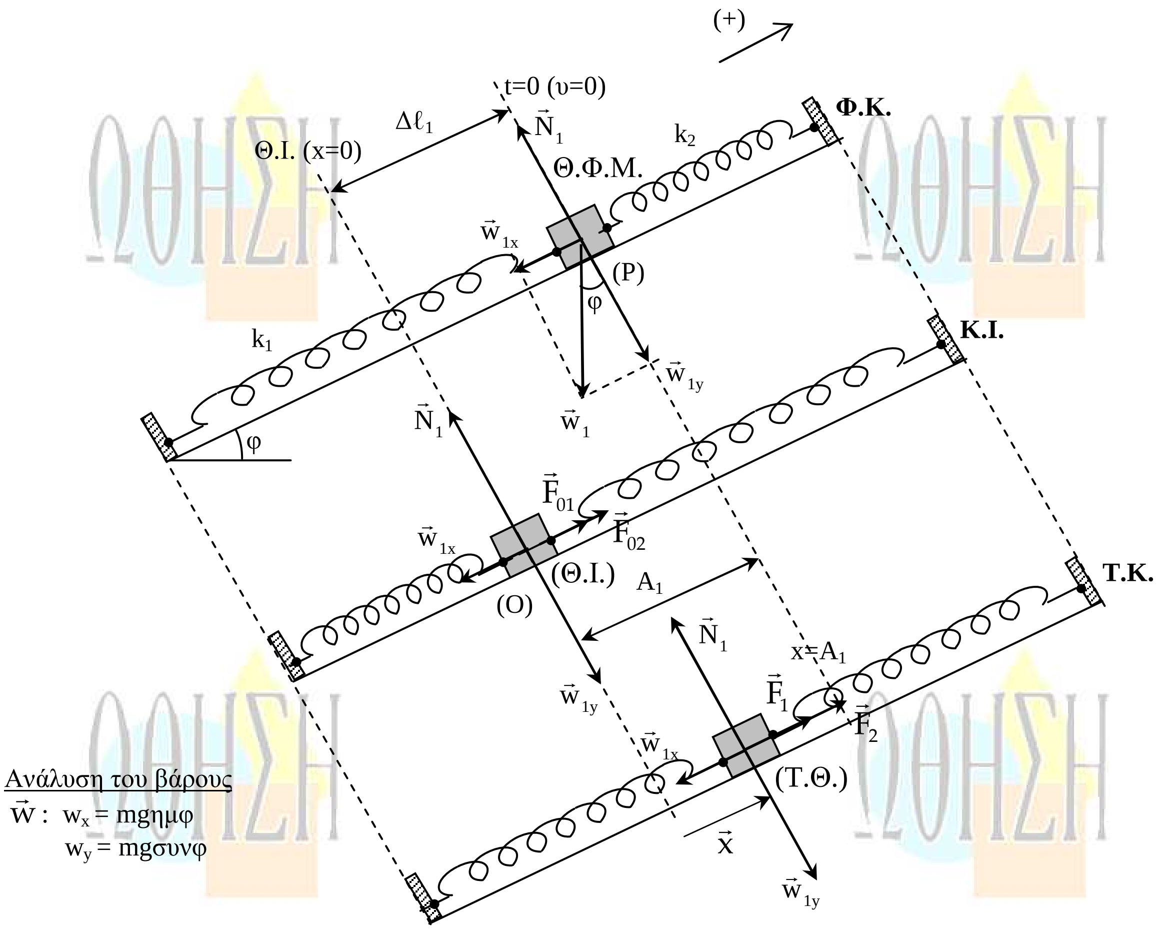
Δ3. Να βρείτε τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του σώματος Σ_2.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2, ώστε το Σ_2 να μην ολισθαίνει σε σχέση με το Σ_1. Δίνονται: $\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 30^o = \frac{1}{2}$, $g = 10 m/s^2$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Δ1. Για το $Σ_1$ στη θέση ισορροπίας O (x=0) ισχύει:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{01} + F_{02} - w_{1x} = 0 \Rightarrow F_{01} + F_{02} - m_1 g ημφ = 0 \Rightarrow k_1 \Delta\ell_1 + k_2 \Delta\ell_1 - m_1 g ημφ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(k_1 + k_2)\Delta\ell_1 = m_1 g ημφ} \quad \textbf{(1)} \quad \text{και} \quad \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1 + k_2} ημφ \quad \text{ή} \quad \underline{\Delta\ell_1 = 0{,}05\text{m}}$$

Στην τυχαία θέση με θετική απομάκρυνση θα ισχύει:

$$\sum F = \sum F_x = F_1 + F_2 - m_1 g ημφ \Rightarrow \sum F_x = k_1(\Delta\ell_1 - x) + k_2(\Delta\ell_1 - x) - m_1 g ημφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum F_x = k_1 \Delta\ell_1 - k_1 x + k_2 \Delta\ell_1 - k_2 x - m_1 g ημφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum F_x = (k_1 + k_2)\Delta\ell_1 - m_1 g ημφ - (k_1 + k_2)\cdot x \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum F_x = -(k_1 + k_2)\cdot x \quad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. με $D = k_1 + k_2 = 200\text{N/m}$

και κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m_1}} \Rightarrow \underline{\omega = 10\text{r/s}}$

Δ2. Για το πλάτος A_1 της ταλάντωσης ισχύει

$$\underline{A_1 = \Delta\ell_1 = 0{,}05\text{m}},$$

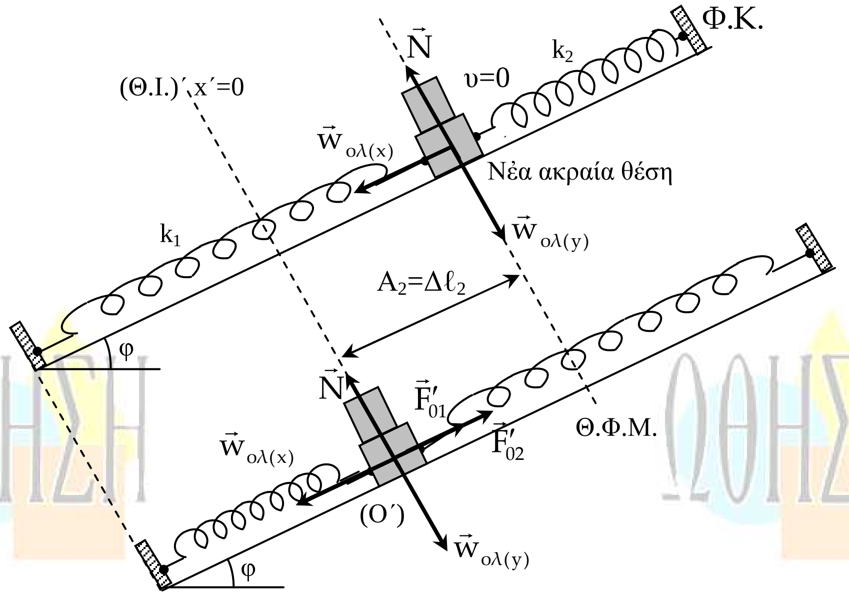
ως απόσταση ακραίας θέσης από τη θέση ισορροπίας.

Γενικά ισχύουν οι σχέσεις $x = A_1 \eta\mu(\omega t + \phi_0)$, $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ και αφού για t=0 είναι x=+A₁ και $\upsilon = 0$, για την αρχική φάση θα έχουμε:

$$\begin{cases} A_1 = A_1 \eta\mu\phi_0 \\ 0 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\phi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu\phi_0 = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\phi_0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{0 \le \phi_0 < 2\pi} \phi_0 = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

Άρα, $x = 0{,}05\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2})$ ή $\boxed{x = 0{,}05\sigma\upsilon\nu(10t)}$ (S.I.)

Δ3.



Αφού το Σ_2 δεν ολισθαίνει ως προς το Σ_1 (περιοχή στατικής τριβής) τα δύο σώματα κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M = m_1 + m_2 \rightarrow M = 8kg$ πραγματοποιώντας Α.Α.Τ. με νέα θέση ισορροπίας. Η νέα θέση ισορροπίας θα αντιστοιχεί σε παραμόρφωση των ελατηρίων ίση με $\Delta\ell_2$. Δηλαδή:

$$\sum F'_x = 0 \Rightarrow F'_{01} + F'_{02} - (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi = 0 \Rightarrow$$

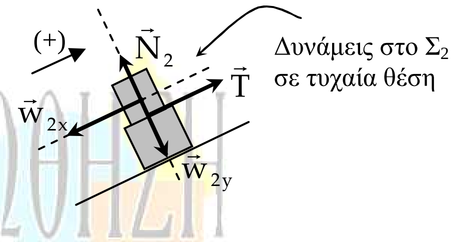
$$\Rightarrow (k_1 + k_2)\Delta\ell_2 = (m_1 + m_2)g\eta\mu\phi \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\phi}{k_1 + k_2} \Rightarrow \underline{\Delta\ell_2 = A_2 = 0{,}2m}$$

Η δύναμη επαναφοράς της νέας ταλάντωσης είναι $\sum \vec{F}' = -D \cdot \vec{x}'$ και η κυκλική της συχνότητα $\omega' = \sqrt{\frac{D}{M}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}} = \underline{5r/s}$.

Για τη σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 θα έχουμε

$$D_2 = m_2\omega'^2 \Rightarrow \boxed{D_2 = 150N/m}$$

Δ4. Για το σώμα Σ_2 στην τυχαία θέση με θετική απομάκρυνση ισχύει:



- $\sum F_{2y} = 0 \Rightarrow N_2 - m_2 g \sigma \upsilon \nu \varphi = 0 \Rightarrow \underline{N_2 = m_2 g \sigma \upsilon \nu \varphi = 30\sqrt{3} N}$
- $\sum \vec{F}_{2x} = -D_2 \vec{x}' \Rightarrow \vec{T} + \vec{w}_{2x} = -D_2 \vec{x}' \Rightarrow$

$$\Rightarrow T - m_2 g \eta \mu \varphi = -D_2 x' \Rightarrow T = m_2 g \eta \mu \varphi - D_2 x' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{T = 30 - 150x'} \text{ (S.I.)}, \quad \mu\varepsilon \ -0{,}2m \le x' \le 0{,}2m$$

Επομένως θα είναι $T=T_{max}$, όταν $x' = -A_2 = -0{,}2m$, οπότε

$$T_{max} = [30-150(-0{,}2)]\ N \Rightarrow \mathbf{T_{max} = 60N}$$

Για να μην ολισθαίνει το Σ_2 σε σχέση με το Σ_1 θα πρέπει η τριβή να είναι στατική, δηλαδή:

$$T_{max} \le T_{o\rho} \Rightarrow T_{max} \le \mu_{o\rho} \cdot N_2 \Rightarrow \mu_{o\rho} \ge \frac{T_{max}}{N_2} \Rightarrow \mu_{o\rho(min)} = \frac{T_{max}}{N_2} \Rightarrow \boxed{\mu_{o\rho(min)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα παρά τη δυσκολία τους έχουν την απαιτούμενη σαφήνεια, ώστε να γίνουν κατανοητά από τους υποψηφίους ως προς τα ζητούμενά τους. Ειδικότερα:
Οι ερωτήσεις που κλήθηκαν να απαντήσουν οι υποψήφιοι στο θέμα Α δεν παρουσιάζουν σημεία άξια σχολιασμού σε αντίθεση με τα επόμενα θέματα.
Το θέμα Β περιέχει τρεις ποιοτικές ερωτήσεις με την ερώτηση Β3 να αναδεικνύεται, κατά την άποψή μας, στο πρώτο πολύ δύσκολο ζητούμενο της σημερινής εξέτασης.
Εξάλλου και το θέμα Γ παρουσιάζει κλιμακούμενη δυσκολία με το ερώτημα Γ4 να κορυφώνει τα ζητούμενα της άσκησης και να αποτελεί το δεύτερο σημαντικό εμπόδιο στην πορεία ενός υποψηφίου προς το άριστα.
Η άσκηση τέλος, που περιέχει το θέμα Δ αποτελεί κατά την γνώμη μας ένα «δύσκολο» πρόβλημα στο κεφάλαιο των ταλαντώσεων, αφού διαπραγματεύεται το επίμαχο για τους υποψηφίους σημείο **της επαφής δύο σωμάτων**.
Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι οι βαθμολογίες στο μάθημα της Φυσικής θα είναι συμπιεσμένες και κατά την άποψή μας χαμηλότερες σε σχέση με τις περσινές.