ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

http://www.othisi.gr

Δευτέρα, 11 Ιουνίου 2018
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
"Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη."

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μια μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$$

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις των C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 99

Α2. α) Ψ

β) Σχολικό Βιβλίο σελ. 35

Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 216

Α4. α) Λ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in R-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\neq 0$

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R−{0} με

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}\ ,\ x\neq 0$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$		$+$
x^3	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
f	↗		↘		↗

ΤΜ
$f(-2)=-3$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{|-8|}\Leftrightarrow x=-2$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3(x^3+8) > 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x\in(-2,0)$

Επειδή $f'(x) > 0$, για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$.

Ομοίως, $f'(x) < 0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο $x_0 = -2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

Β2. Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο R–{0} με

$$f''(x) = \frac{3x^2\cdot x^3-3x^2\left(x^3+8\right)}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}<0, \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$
f		

άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, οπότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. • <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες</u>

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty\\ \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = -\infty$$

Τότε η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, η οποία είναι μοναδική, επειδή η f είναι συνεχής στο R–{0}.

• <u>Οριζόντιες – Πλάγιες ασύμπτωτες</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1 \text{ , άρα } \lambda=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)= 0, \text{ άρα } \beta=0$$

Άρα η y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4.

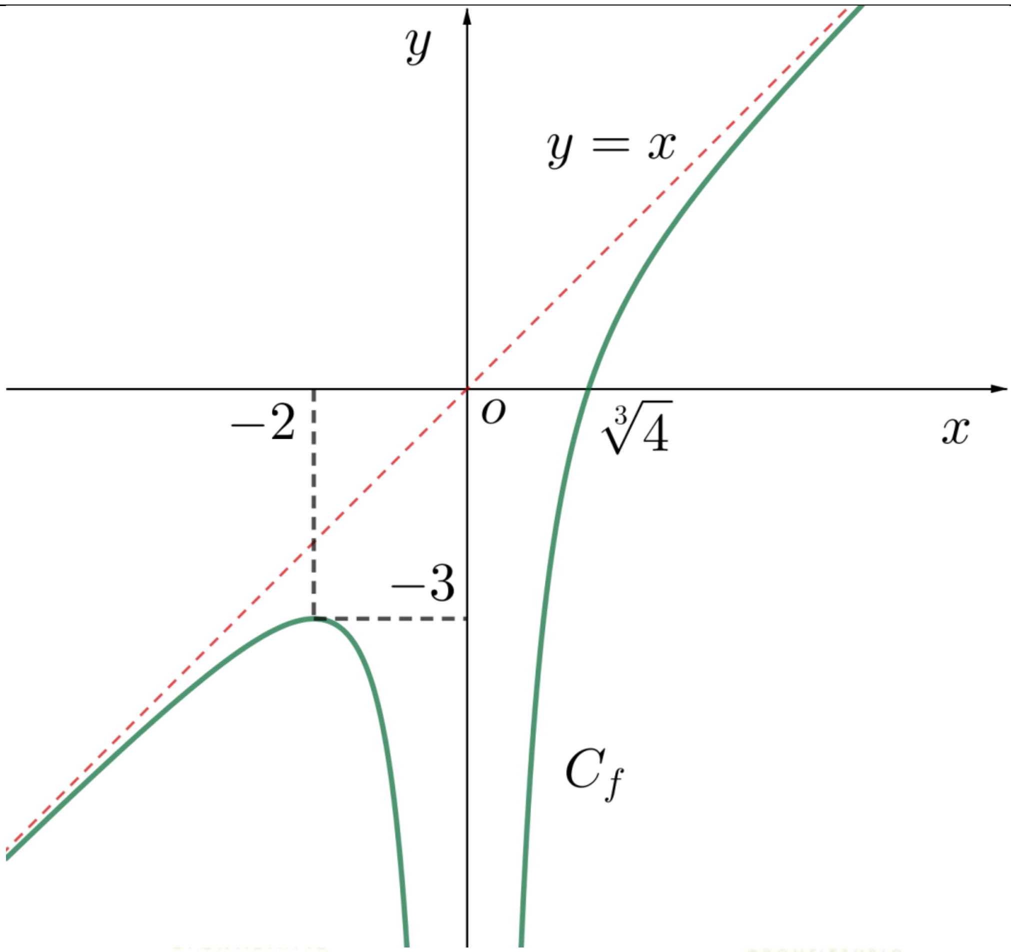
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$ 0	$-$	$+$
f	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ $+\infty$

Τ.Μ

$f(-2) = -3$



ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Έστω $\ell = 8m$ το μήκος του σύρματος και $\ell_1 = x$, $\ell_2 = 8-x$ τα μήκη του τετραγώνου και του κύκλου αντίστοιχα.

Τότε αν E_1 το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς $x/4$, ισχύει ότι:

$$E_1(x) = \frac{x^2}{16}$$

Ενώ για τον κύκλο ακτίνας r, το μήκος της περιφέρειάς του είναι $\ell_2 = 2\pi r$.

Συνεπώς $8-x = 2\pi r \Leftrightarrow$

$$r = \frac{8-x}{2\pi}$$

Άρα αν E_2 το εμβαδόν του κύκλου, τότε $E_2(x) = \pi r^2 \Leftrightarrow$

$$E_2(x) = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Οπότε $E(x) = E_1(x) + E_2(x)$,

με $x>0$ και $\frac{8-x}{2\pi} > 0$

άρα,

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2 \cdot \pi}{4\pi^2} = \frac{\pi \cdot x^2 + 4 \cdot (8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi \cdot x^2 + 4 \cdot \left(64 - 16x + x^2\right)}{16\pi}$$

$$E(x) = \frac{\pi \cdot x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Γ2. Από Γ1 ερώτημα το άθροισμα των εμβαδών είναι η συνάρτηση

$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0, 8)$ που είναι παρ/μη ως πολυωνυμική

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{2((\pi+4)x - 32))}{16\pi} .$$

Η $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$

Η $E'(x) > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x > 32 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}$

Η $E'(x) < 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 < 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x < 32 \Leftrightarrow x < \frac{32}{\pi+4}$

και ισχύει ότι $0 < \frac{32}{\pi+4}$ και $\frac{32}{\pi+4} < 8$ αφού $32 < 8\pi + 32$ δηλ. $0 < 8\pi$ αληθές

x		0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	
$E'(x)$			−	0	+		
E			↘		↗		

Η E′(x) <0 στο (0, 32/(π+4)) και συνεχής στο x_1= 32/(π+4) άρα η Ε γν. φθίνουσα στο (0, 32/(π+4)].
Η E′(x) >0 στο (32/(π+4), 8) και συνεχής στο x_1= 32/(π+4) άρα η Ε γν .αύξουσα στο [32/(π+4), 8).

Άρα θέση τοπικού ελάχιστου η $x_1=\dfrac{32}{\pi+4}$.

Επειδή η διάμετρος δ του κύκλου είναι 2r και καθώς

$$r=\frac{8-x}{2\pi} \text{ ισχύει } \delta=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)} \text{ άρα } \delta=\frac{8}{\pi+4}$$

Τότε η πλευρά α του τετραγώνου είναι ,

$$\alpha=\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}=\delta$$

Γ3.

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}, \quad x\in(0,8)$$

Στο $\Delta_1=\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ η E(x)είναι γν.φθίνουσα και συνεχής άρα το σύνολο τιμών της στο Δ_1 είναι:

$$E(\Delta_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

Επειδή $\dfrac{16}{\pi}>5>\dfrac{16}{\pi+4}$ αφού $16>5\pi$ (π=3,14< 3,2 τότε $5\pi<5\cdot 3{,}2 \Leftrightarrow 5\pi<16$)
και $5\pi+20>16 \Leftrightarrow 5\pi>-4$ (αληθές)

Συνεπώς το $5\in E(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_0 \in \Delta_1$ με $E(x_0)=5$ και καθώς η Ε είναι γν. φθίνουσα στο Δ_1 η ρίζα x_0 θα είναι μοναδική στο Δ_1.

Επίσης στο Δ_2 η E(x) γν. αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της στο Δ_2 είναι :

$$E(\Delta_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to 8^-}E(x)=\frac{(\pi+4)64-64\cdot 8+256}{16\pi}=\frac{4(\pi+4)-32+16}{\pi}=\frac{4\pi}{\pi}=4$$

Όμως $5\notin E(\Delta_2)$ άρα τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0\in\Delta_1$ με $E(x_0)=5$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in R$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2\in R$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1.

$$f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2,\quad x\in R,\quad \alpha>1$$
$$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x,\quad x\in R$$
$$f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2(e^{x-\alpha}-1),\quad x\in R$$
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$$
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow x>\alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	∩		∪

Για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το $(\alpha, f(\alpha))$ δηλαδή $(\alpha, 2-\alpha^2)$.

Δ2. Αν $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ τότε $f'(\Delta_1) \underset{f'\downarrow \text{στο } \Delta_1}{\overset{f' \text{ συνεχής}}{=}} \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[2-2\alpha, +\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-\alpha}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$

$0\in f'(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,\alpha)$ με $f'(x_1)=0$ και η f' γνήσια φθίνουσα στο Δ_1 άρα μοναδικό

Για

$$x<x_1<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1) \Rightarrow f'(x)>0$$

Για

$$x_1<x<\alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1)>f'(x) \qquad 0>f'(x)$$

Αν $\Delta_2=[\alpha,+\infty)$ τότε $f'(\Delta_2) \underset{f'\uparrow \text{στο } \Delta_2}{\overset{f \text{ συνεχής}}{=}} \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right)=[2-2\alpha, +\infty)$

$f'(x)=e^{x-\alpha}\left(2-\dfrac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{x-\alpha}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{x-\alpha}}=0$

Άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{2x}{e^{x-\alpha}}\right)=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha}=+\infty$

Επομένως

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$$

$0\in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(\alpha,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=0$ και η f' γνήσια αύξουσα στο Δ_2 άρα μοναδικό

Για

$$\alpha<x_2<x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_2)<f'(x) \qquad 0<f'(x)$$

Για

$$\alpha<x<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2) \qquad f'(x)<0$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2=2(e^{1-\alpha}-1)<0$ γιατί $\alpha>1 \Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}<1$

Όμως $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(x_1, x_2)$ άρα $x_1<1<\alpha<x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ άρα $f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για $\alpha=2$, $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in R$, $f'(x)=2e^{x-2}-2x$, $x\in R$.

Η f κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(2,f(2))$ στο $(2,+\infty)$.

Η εφαπτομένη στο $(2,f(2))$ είναι:

$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$

Για $x\in[2,3]$, $f(x)\geq -2x+2$

$$f(x)\cdot\sqrt{x-2}\geq(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$$

Το ''='' ισχύει μόνο στο 2, άρα:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx \quad \text{με}$$

x	u
2	0
3	1

$$\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx$$

Θέτουμε $u=\sqrt{x-2}$, οπότε $u^2=x-2$, άρα $2udu=dx$.

Επομένως

$$\int_0^1\left(-2\left(u^2+2-1\right)\cdot u\cdot 2u\right)du=$$

$$\int_0^1\left(-4u^2\left(u^2+1\right)\right)du=\int_0^1\left(-4u^4-4u^2\right)du=\left[-\frac{4u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}\right]_0^1=$$

$$-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=\frac{-12-20}{15}=-\frac{32}{15}$$

Άρα $\displaystyle\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα είναι σαφώς διατυπωμένα και το τρίωρο είναι ικανός χρόνος διεκπεραίωσής τους. Έχουν αφόρμηση από αντίστοιχα θέματα του σχολικού βιβλίου και είναι διατυπωμένα κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι περισσότεροι υποψήφιοι να μπορούν να ανταποκριθούν στα δύο πρώτα θέματα.

Επικεντρώνονται σε συγκεκριμένα τμήματα της ύλης, παγιώνοντας μία καινούρια φιλοσοφία εξέτασης.

Εκτιμούμε ότι οι βαθμολογίες θα κινηθούν ανοδικά.