ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

Δευτέρα, 19 Ιουνίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x), \text{ για κάθε } x\in R$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

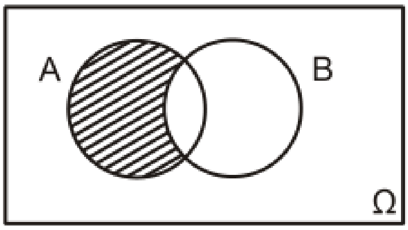
α) Αν $f:R\to R$ και $g:R\to R$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$, για κάθε $x\in R$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$, με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $B-A$.



Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 31
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 14
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 72
Α4. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές xi και οι αντίστοιχες συχνότητες νi που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν :
α. η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)
β. η διάμεσος δ (μονάδες 5)
γ. η διακύμανση s^2. (μονάδες 7)

Μονάδες 18

Β2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

x_i	v_i	N_i	$x_i v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot v_i$
1	2	2	2	–3	9	18
3	3	5	9	–1	1	3
5	4	9	20	1	1	4
9	1	10	9	5	25	25
Σύνολο	10	–	40	–	–	50

Β1. **α.** $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{40}{10} = 4$$

β. $\delta = \dfrac{t_5 + t_6}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$, όπως προκύπτει από τη στήλη N_i (αθροιστικών συχνοτήτων) του παραπάνω πίνακα.

Άλλος τρόπος:

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9

Το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός, άρα:

$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

γ. $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{50}{10} = 5$$

Β2. Είναι $s^2 = 5 \Rightarrow s = \sqrt{5}$ και $\bar{x} = 4$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{10} \qquad \left(\frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{16} > \frac{1}{100} \Leftrightarrow 500 > 16\right)$$

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in R$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος Γ2 τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in R$

Γ1. $f'(x) = 2x - 1$, $x \in R$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$, η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{1}{2}$ και είναι ίσο με

$$f(\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Γ2. Έστω (ε) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$

(ε): $y = f'(2)x+\beta$

$f'(2)= 2\cdot2-1=3$

$f(2)=2^2-2+1=3$

$A\in(\varepsilon)$ οπότε ισχύει $f(2)=3\cdot2+\beta \Leftrightarrow 3=6+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$

άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι (ε):$y=3x-3$

Γ3. Έστω $B(0, y)$ το σημείο τομής της ε με τον $y'y$ και $\Gamma(x, 0)$ το σημείο τομής της ε με τον $x'x$.

$B\in(\varepsilon)$ άρα $y=3\cdot0-3=-3 \Leftrightarrow y=-3$ $\quad$ $B(0, -3)$

$\Gamma\in(\varepsilon)$ άρα $0=3\cdot x-3 \Leftrightarrow x=1$ $\quad$ $\Gamma(1,0)$

Γ4. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.
Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

Α: «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

Β: «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2.**

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων: A', $A\cap B$, $A-B$, $B-A$. (μονάδες 8)

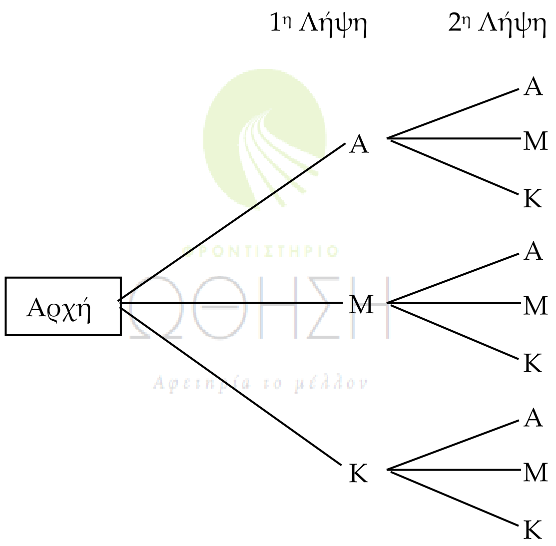
β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο Α όσο και με το ενδεχόμενο Β, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα Ρ(Γ). (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1.

Α: Άσπρη, Μ: Μαύρη, Κ: Κόκκινη



Ω={ ΑΑ, ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΜ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ, ΚΚ}

Δ2. Α={ ΑΜ, ΜΜ, ΚΜ}

Β={ ΑΜ, ΑΚ, ΜΑ, ΜΚ, ΚΑ, ΚΜ}

Δ3. **α.** Είναι $N(\Omega)=9$, $N(A)=3$ και $N(B)=6$

- ***α' τρόπος***

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\ P(A')=\frac{2}{3}$$

<u>β′ τρόπος</u>

A′={AA, AK, MA, MK, KA, KK}, *άρα* P(A′)= $\dfrac{N(A')}{N(\Omega)}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

- $A\cap B=\{AM, KM\}$ $N(A\cap B)=2$

  $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{9}$

- **<u>α′ τρόπος</u>**

  $A-B=\{MM\}$ $N(A-B)=1$

  $P(A-B)=\dfrac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{9}$

  <u>β′ τρόπος:</u>

  $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{9}$

- **<u>α′ τρόπος</u>**

  $B-A=\{AK, MA, KA, MK\}$

  $N(B-A)=4$

  $P(B-A)=\dfrac{N(B-A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{9}$

  <u>β′ τρόπος:</u>

  $P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{6}{9}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$

β. Πρέπει $\Gamma\cap A=\varnothing$ και $\Gamma\cap B=\varnothing$

Άρα $\Gamma\subseteq (A\cup B)'=\{AA, KK\}$.

Συνεπώς $\Gamma=\varnothing$ ή $\Gamma=\{AA\}$ ή $\Gamma=\{KK\}$ ή $\Gamma=\{AA, KK\}$.

Οι πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων είναι αντίστοιχα:

$P(\Gamma)=0$ ή $P(\Gamma)=\dfrac{1}{9}$ ή $P(\Gamma)=\dfrac{1}{9}$ ή $P(\Gamma)=\dfrac{2}{9}$

Συνεπώς, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η $P(\Gamma)$ είναι $\dfrac{2}{9}$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Το κύριο χαρακτηριστικό των σημερινών θεμάτων είναι ότι εξετάζουν βασικές γνώσεις από όλα τα κεφάλαια της ύλης με τρόπο διακριτό χωρίς συνδυασμό δεδομένων. Τα ερωτήματα είναι διατυπωμένα με σαφήνεια και στηρίζονται στην ασκησιολογία του σχολικού βιβλίου.