ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

Παρασκευή, 9 Ιουνίου 2017
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. α. Ψ

β. Έστω f(x)=|x|, x∈R. Η f είναι συνεχής στο R ως απόλυτη τιμή συνεχούς άρα είναι συνεχής και στο 0.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 ενώ είναι συνεχής.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 73

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, x∈R, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. $D_f=(0,+\infty)$, $D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g \,/\, g(x)>0\}=\{x\in R-\{1\} \,/\, x(1-x)>0\}=(0,1)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

B2. $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\ln x-\ln(1-x),\quad x\in(0,1)$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}>0,\ x\in(0,1)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1), οπότε είναι και "1–1" και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Έστω $y=h(x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y \Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$, άρα

$h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in R.$

B3. $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in R$

$\varphi'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ για κάθε $x\in R$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-2(e^x+1)\cdot e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=$$

$$=\frac{e^x}{(e^x+1)^3}\cdot(1-e^x)$$

$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow e^0>e^x \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	$+$	0	$-$
φ	$\cup$		$\cap$

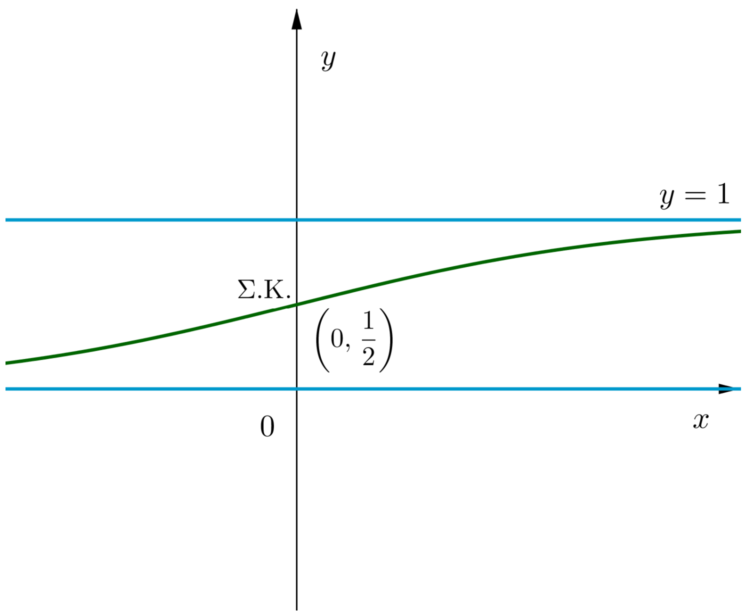
Σ.Κ. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DL'H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

άρα η $\varepsilon_1: y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{1}=0$

άρα ο άξονας x'x: $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-ημx$, $x\in[0,\pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες(ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1); $y=-x$ και (ε_2):$y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1),(ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1),(ε_2) και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. $f(x)=-ημx$, $x\in[0,\pi]$

Το $A\notin C_f$ διότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq-\frac{\pi}{2}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x)=-συνx$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής

Τότε (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\Rightarrow y+ημx_0=-συνx_0(x-x_0)$

$A\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+ημx_0=-συνx_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+ημx_0=-\frac{\pi}{2}συνx_0+x_0\,συνx_0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+ημx_0+\frac{\pi}{2}συνx_0-x_0\,συνx_0=0$

Θεωρούμε $κ(x)=ημx-xσυνx+\frac{\pi}{2}συνx-\frac{\pi}{2}$ $x\in[0,\pi]$

Προφανείς λύσεις της $\kappa(x)=0$ είναι οι $x_1=0$ και $x_2=\pi$

Η κ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με

$$\kappa'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-\frac{\pi}{2}\eta\mu x=\eta\mu x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$\kappa'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$ ή $x=\dfrac{\pi}{2}$

$\kappa'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

$\kappa'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

κ	[0	π / 2	π]
κ′(x)	−	0	+
κ(x)	↘		↗
Τ.Μ	Τ.Ε		Τ.Μ

$\kappa(0)=0 \quad \kappa\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{2} \quad \kappa(\pi)=0$

Είναι $\kappa\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=\left[1-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ και $\kappa\left((\dfrac{\pi}{2},\pi]\right)=(1-\dfrac{\pi}{2},0]$

Το $0\in\kappa\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα η $x_1=0$ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Το $0\in\kappa\left((\dfrac{\pi}{2},\pi]\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\dfrac{\pi}{2},\pi]$ άρα η $x_2=\pi$ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

<u>β′ τρόπος απόδειξης</u> ότι οι ρίζες της κ(x)=0 είναι ακριβώς δύο

Έστω ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις ρίζες.

Δηλαδή η κ(x)=0 έχει ρίζες τις $x_1, x_2, x_3\in[0,\pi]$ με έστω $x_1<x_2<x_3$. Τότε στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle, άρα υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\xi_1\in(x_1, x_2)\subseteq[0,\pi]$, $\xi_2\in(x_2, x_3)\subseteq[0,\pi]$, ώστε $\kappa'(\xi_1)=\kappa'(\xi_2)=0$ με $\kappa'(x)=-\eta\mu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

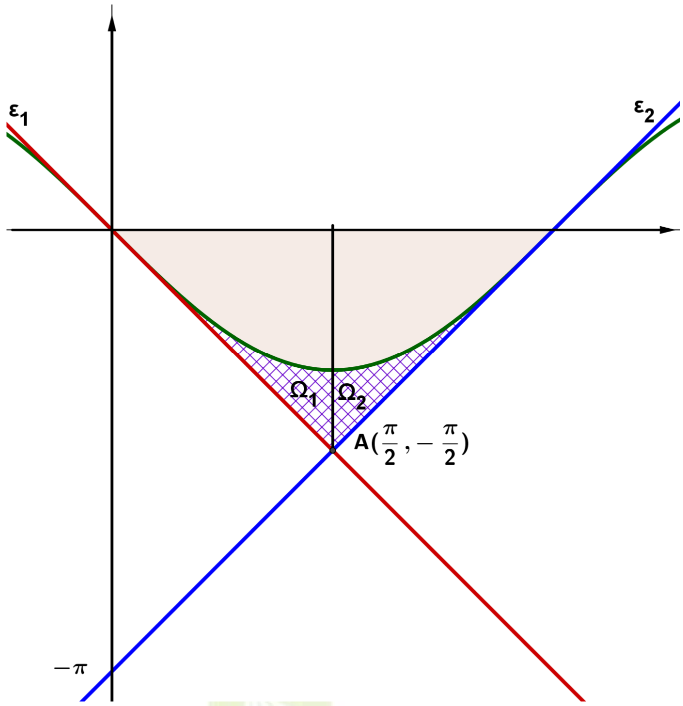
Όμως, $\kappa'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ ή $\eta\mu x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=0$ ή $x=\pi$, άτοπο. Άρα οι μοναδικές ρίζες είναι οι $x_1=0$ και $x_2=\pi$.

Τότε οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι

$\varepsilon_1: \; y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = -x$

$\varepsilon_2: \; y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi) \Rightarrow y = x - \pi$

Γ2.



$f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = \eta\mu x > 0$, $x \in (0,\pi)$ και συνεχής στα σημεία $x_0=0$, $x_1=\pi$. Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$. Συνεπώς η C_f είναι πάντα πάνω από τις εφαπτομένες της (ε_1), (ε_2), με εξαίρεση τα σημεία επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq -x \Leftrightarrow f(x)+x \geq 0$ και $f(x) \geq x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi \geq 0$. Τότε αν $E(\Omega_1)$ το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f, της ε_1 και της κατακόρυφης ευθείας $x = \frac{\pi}{2}$, ισχύει:

- $$E(\Omega_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x)+x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Ομοίως, αν $E(\Omega_2)$, το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f, της ε_2 και της κατακόρυφης ευθείας $x = \frac{\pi}{2}$, ισχύει:

- $$E(\Omega_2) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)dx = \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

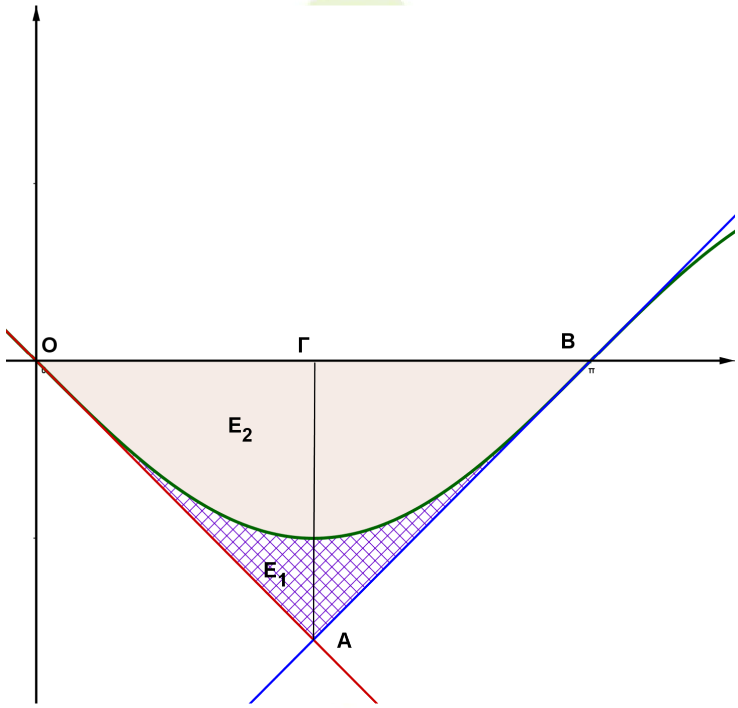
Άρα, $E_1 = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \frac{\pi^2}{4} - 2$

Η $f(x) = -\eta\mu x \leq 0$ για $x \in [0, \pi]$, συνεπώς:

$E_2 = \int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -(-1) + 1 = 2$

Άρα, $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2} = \dfrac{\pi^2}{8}-1$.

<u>**Άλλος τρόπος για τον υπολογισμό του E_1:**</u>



Είναι $OB = \dfrac{\pi}{2}$ και $A\Gamma = \left|-\dfrac{\pi}{2}\right| = \dfrac{\pi}{2}$

$E_1 = (AOB) - E_2 = \dfrac{1}{2} OB \cdot A\Gamma - E_2 =$

$\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot\dfrac{\pi}{2} - E_2 = \dfrac{\pi^2}{4} - E_2 = \dfrac{\pi^2}{4} - E_2 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2$

(αφού $E_2=2$)

Γ3. $h(x) = \dfrac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = \dfrac{x - \eta\mu x}{-\eta\mu x - x + \pi}$

$\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x - x + \pi) = 0$

Επειδή η f κυρτή η C_f είναι πάντα πάνω από την εφαπτομένη της (ε_2): $y=x-\pi$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Οπότε $f(x)>x-\pi$ κοντά στο π, δηλαδή η $f(x)-x+\pi>0$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\eta\mu x) = \pi > 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi} h(x) = +\infty$

Γ4. Έστω $\varphi(x) = -\dfrac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$, όπως δείξαμε στο Γ3., ισχύει $f(x) \geq -x+\pi$, $x \in [0, \pi]$, συνεπώς και στο $[1, e] \subseteq [0,\pi]$.

Άρα $-\eta\mu x \geq x - \pi \overset{x>0}{\Rightarrow} -\dfrac{\eta\mu x}{x} \geq 1 - \dfrac{\pi}{x}$ (χωρίς παντού να ισχύει το ''='')

Άρα

$$\int_1^e -\frac{\eta\mu x}{x}dx > \int_1^e\left(-\frac{\pi}{x}+1\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e -\frac{\eta\mu x}{x}dx > [-\pi\ln x + x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e -\frac{\eta\mu x}{x}dx > -\pi\ln e + e - 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e -\frac{\eta\mu x}{x}dx > -\pi + e - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in R$, τον άξονα y'y και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1.
- Για $-1 \le x < 0$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
- Για $0 < x \le \pi$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.
- $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4} = 0\\ f(0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0, \text{ άρα f συνεχής στο } 0$$

  Άρα f συνεχής στο $[-1, \pi]$.
- Για $-1 < x < 0$: $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = (-x)^{\frac{4}{3}}$

  $f'(x) = \dfrac{-4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} < 0, -1 < x < 0$
- Για $0 < x < \pi$: $f'(x)=e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x$

  $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow$

$$εφx=-1 \overset{0<x<\pi}{\Leftrightarrow} x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x ημx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $(\frac{3\pi}{4}, f(\frac{3\pi}{4}))$ και το (0, f(0)).

Δ2. Για $-1<x<0: f'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}<0$

Για $0<x\le\pi$: $f'(x)=e^x(ημx+συνx)$

$f'(x)=0 \overset{(Δ1)}{\Leftrightarrow} x=\frac{3\pi}{4}$ μοναδική ρίζα στο (0, π) και επειδή η f′ συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας πρόσημων της f′ και μεταβολών της f .

	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
x_0	0	○	π
$f'(x_0)$	$f'(0)=1>0$		$f'(\pi)=-e^{\pi}<0$

Μονοτονία

- $f'(x)<0$, $x\in(-1, 0)$ και f συνεχής στο [−1, 0] άρα f γνησίως φθίνουσα στο [−1, 0].
- $f'(x)>0$, $x\in(0,\frac{3\pi}{4})$ και f συνεχής στο $[0,\frac{3\pi}{4}]$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{3\pi}{4}]$.
- $f'(x)<0$, $x\in(\frac{3\pi}{4},\pi)$ και f συνεχής στο $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{3\pi}{4},\pi]$.

x	−1 0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f'(x)	−	+	−
f	↘	↗	↘

Ακρότατα

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο −1 το f(−1)=1, τοπικό ελάχιστο στο 0, το f(0)=0, τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ το $f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$, τοπικό ελάχιστο στο π το f(π)=0. Άρα ολικό ελάχιστο το μικρότερο ακρότατο, δηλαδή το 0 και ολικό μέγιστο το μεγαλύτερο ακρότατο, δηλαδή το $e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$, αφού $1<e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2<e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4<e^{\frac{3\pi}{2}}\cdot 2 \Leftrightarrow 2<e^{\frac{3\pi}{2}}$ που ισχύει αφού $\frac{3\pi}{2}>1 \Leftrightarrow e^{\frac{3\pi}{2}}>e>2$

Σύνολο τιμών: $f([-1, \pi])=\left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Δ3. $E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}|e^x\eta\mu x-e^{5x}|dx=\int_0^{\pi}|e^x(\eta\mu x-e^{4x})|dx=\int_0^{\pi}e^x|\eta\mu x-e^{4x}|dx$

Για $0\leq x\leq\pi$ τότε $4x\geq 0 \overset{e^x\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} e^{4x}\geq 1$

Για $0\leq x\leq\pi$ τότε $\eta\mu x\leq 1$

Άρα $\eta\mu x-e^{4x}\leq 0$.

Επομένως $E(\Omega)=\int_0^{\pi}-e^x(\eta\mu x-e^{4x})dx=\int_0^{\pi}(-e^x\eta\mu x+e^{5x})dx$

Έχουμε $I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx$

$I=-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx$

$I=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$

$I=-(e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi-e^0\sigma\upsilon\nu 0)-I$

$2I=e^{\pi}+1$

$I=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Και $\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\dfrac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\dfrac{e^{5\pi}}{5}-\dfrac{1}{5}$, άρα $E(\Omega)=-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}+\dfrac{e^{5\pi}}{5}-\dfrac{1}{5}$

Δ4.

$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\quad(1)\quad\Leftrightarrow$

$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-16e^{-\frac{3\pi}{4}}\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2=8\sqrt{2}\overset{(:16e^{-\frac{3\pi}{4}})}{\Leftrightarrow}$

$f(x)-\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}+\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2\Leftrightarrow$

$f(x)=f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2$

Προφανής ρίζα το $\dfrac{3\pi}{4}$.

Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, έχουμε:

$f(x)\leq f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\leq f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)^2$, με το ''='' να ισχύει μόνο στο $\dfrac{3\pi}{4}$

Άρα το $\dfrac{3\pi}{4}$ είναι μοναδική ρίζα της (1).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα καλύπτουν όλη την εξεταστέα ύλη. Διακρίνονται: α) από αλγεβρική δυσκολία η οποία απαιτούσε δεξιοτεχνία πράξεων, β) από θεωρητική δυσκολία, η οποία εστιαζόταν κυρίως στο Γ1 και Δ4.

Ακόμη, καθοριστικό ρόλο θα παίξει και η διαχείριση του χρόνου στην επίλυση των ερωτημάτων. Όλα τα προηγούμενα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για ένα απαιτητικό διαγώνισμα που θα οδηγήσει σε μείωση του ποσοστού των υποψηφίων που πέτυχαν υψηλές βαθμολογίες σε σχέση με πέρυσι.