ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

http://www.othisi.gr

Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2019
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq R$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to R$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδες 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α.

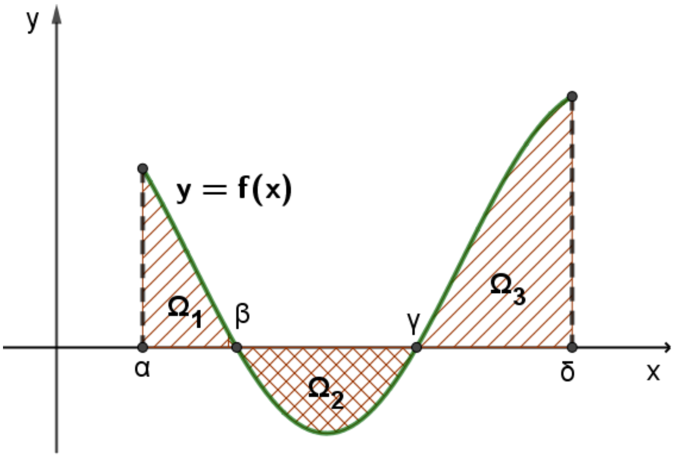
(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2, Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,



τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** −4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. **α)** Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 15

β) **i)** Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 35-36

ii) Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 35-36

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 142

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελίδα 135

Α4. **α)** Λάθος

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

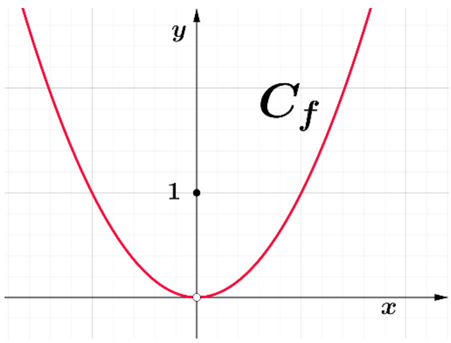
Παρατηρούμε ότι αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β) Λάθος

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

Είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)=1$.



Α5. Η σωστή απάντηση είναι το γ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)= e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1–1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Αφού η $f(x)= e^{-x}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)\overset{-x=u}{=}\lim_{u\to-\infty}(e^{u}+\lambda)=\lambda=2$$

Β2. Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-x$, η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[2, 3]$. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών.

Είναι:

$$g(2)=f(2)-2= e^{-2}+2-2=\frac{1}{e^2}>0$$

$$g(3)=f(3)-3= e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1<0$$

Δηλαδή $g(2)\cdot g(3)<0$.

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$

Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)= (e^{-x}+2-x)' = -e^{-x}-1<0$, $x\in\mathbb{R}$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(2, 3)$.

Β3. Είναι $f(x)= e^{-x}+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow e^{-x_1}+2= e^{-x_2}+2 \overset{e^x\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} -x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Οπότε η f είναι '1–1' συνάρτηση, άρα η f αντιστρέφεται.

Είναι:

$f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2$

Πρέπει $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$

Επομένως ισοδύναμε για y>2, έχουμε $e^{-x} = y-2$

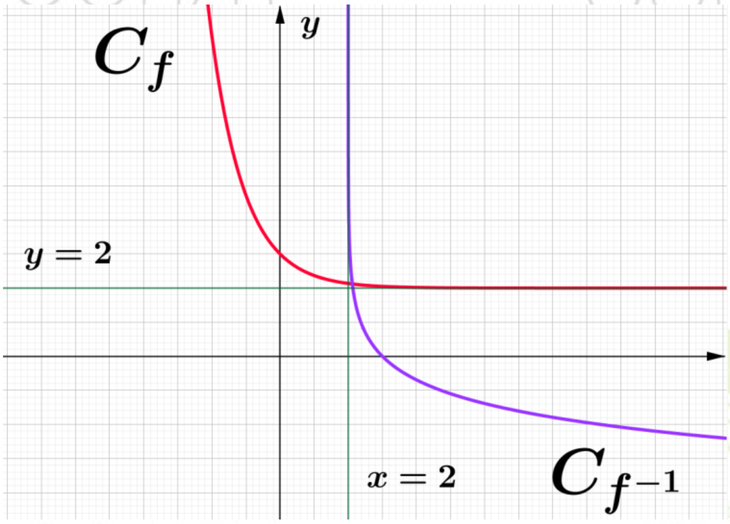
$-x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$

Δηλαδή $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, με x>2.

B4.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}[-\ln(x-2)] = -\lim\limits_{x\to 2^+}[\ln(x-2)] \overset{x-2=u>0}{=} -\lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = +\infty$

Άρα η x=2 είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$, αφού η f^{-1} είναι συνεχής στο $(2,+\infty)$.



Η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{-x} + 2$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της e^{-x} κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Η γραφική παράσταση της $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $-\ln x$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x), $x \geq 1$.
Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Α(3, 10), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\Delta}{MOK}$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου Κ(x, 0) και Ο(0, 0).

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Η f είναι παρ/μη στο x_0=1 συνεπώς είναι και συνεχής άρα
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = e^{1-1} + \beta = 1 + \beta$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha$

Άρα $1+\beta = 1+\alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (1)

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1, οπότε:

- Για x<1, έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x-1} = \frac{e^{x-1} - 1 + \beta(x-1)}{x-1} = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} + \frac{\beta(x-1)}{x-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1^-} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1^-} e^{x-1} = 1$$

Άρα: $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{e^{x-1}}{x-1} + \beta \right) = 1 + \beta$

- Για x>1, έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x-1} = \frac{x^2 - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

Άρα $1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$

Οπότε από την (1) ισχύει ότι $\alpha=1$.

Γ2. Για $\alpha=1$ και $\beta=1$ η $f(x)$ παίρνει τη μορφή

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1\\ e^{x-1}+x, & x<1\end{cases}$$

Τότε <u>για $x<1$</u> η f παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων ($x-1$ με την e^x) και πράξη παραγωγισίμων (e^{x-1}, x) οπότε παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x-1}+1$, $x<1$.

Οπότε $f'(x)>0$ στο $(-\infty, 1)$

<u>Για $x>1$</u> η f παρ/μη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x>0$ για $x>1$ άρα $f'(x)>0$ στο $(1, +\infty)$.

Επειδή f συνεχής στο R και f γν.αύξουσα στο R

(επειδή $f'(x)>0$, $x\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ και f συνεχής στο 1)

$f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$ αφού

  $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1} \underset{\substack{x\to-\infty\\ u\to-\infty}}{\overset{x-1=u}{=}} \lim_{u\to-\infty} e^u=0$ και $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

  Άρα η f έχει σύνολο τιμών το R.

Γ3. **i .**

<u>1ος τρόπος</u>

Η f συνεχής στο $[-2, 0]$.

Το $f(0)=e^{0-1}+1\cdot 0=\frac{1}{e}>0$ και

$f(-2)=e^{-3}-1\cdot 2=\frac{1}{e^3}-2=\frac{1-2e^3}{e^3}<0$

Άρα από Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-2,0)$ έτσι ώστε $f(x_0)=0$. Επιπλέον η f γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα η ρίζα $x_0<0$ είναι και μοναδική.

<u>2ος τρόπος</u>

Η f ως γν.αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty, 0)$ έχει σύνολο τιμών το

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)=\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$$

Και τότε το $0\in f(\Delta_1)$ συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\Delta_1$ με $f(x_0)=0$.

Καθώς η f γνήσια αύξουσα στο Δ_1 η ρίζα $x_0<0$ είναι και μοναδική.

ii. Για $x > x_0 \overset{f \text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Επιπλέον } f^2(x) > 0 \text{ και } f(x) > 0 \\ \text{επίσης } x_0 < 0 \Leftrightarrow -x_0 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow -x_0 f(x) > 0$$

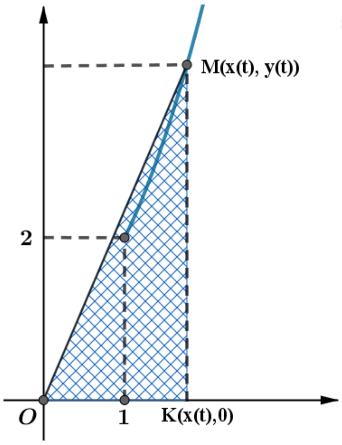
Συνεπώς $f^2(x) - x_0 f(x) > 0$.

Άρα η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4. $y=f(x) \Rightarrow y=x^2+1$.

Το σημείο $M \in C_f$ άρα είναι της μορφής $M\big(x(t), y(t)\big)$ τότε ισχύει:

$$x(t_0) = 3, y(t_0)=10.$$
$$x'(t_0)=2 \text{ μον./sec}$$



Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MOK}$ όπου $\left(E(t) = E_{\overset{\Delta}{MOK}}\right)$ δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = \frac{1}{2}(OK)\cdot(MK) \Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}x(t)\cdot y(t), \quad t \geq 0$$

Η $E(t)$ παραγωγίσιμη με παράγωγο $E'(t) = \frac{1}{2}\big(x'(t)\cdot y(t) + x(t)\cdot y'(t)\big), t \geq 0$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\big(x'(t_0)\cdot y(t_0) + x(t_0)\cdot y'(t_0)\big) \quad (3)$$

Ισχύει ότι: $y(t) = x^2(t)+1, t \geq 0$

Οπότε,

$y'(t) = 2x(t)x'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow} y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow y'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 \Leftrightarrow$

$y'(t_0) = 12$ μον/sec

$$(3) \Rightarrow E'(t_0) = \frac{1}{2}(2\cdot 10 + 3\cdot 12) = \frac{1}{2}(20+36) = \frac{1}{2}\cdot 56 = 28 \Rightarrow$$

$E'(t_0) = 28$ μον^2/sec .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in R$ και η ευθεία (ε): $y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της A(1,1).

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in R$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda\in R$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in R$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$

$D_f=R$

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha,\ x\in R$$

Αφού η (ε) εφάπτεται στη C_f στο σημείο A(1,1):

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1 \\ \alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+\beta=1 \\ \alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2 \\ \alpha=-1\end{cases}$$

Δ2. $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$

$$E(\Omega)=\int_1^2|f(x)-(-x+2)|dx=\int_1^2|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2|dx=$$

$$\int_1^2|(x-1)\ln(x^2-2x+2)|dx=\int_1^2|(x-1)\ln[(x-1)^2+1]|dx\ \underset{(x-1)^2+1\geq 1}{\overset{x\geq 1}{=}}$$

$$\int_1^2(x-1)\ln[(x-1)^2+1]\,dx\ \underset{\substack{x\to 1,\ u\to 1 \\ x\to 2,\ u\to 2}}{\overset{\substack{u=(x-1)^2+1 \\ du=2(x-1)dx}}{=}}\ \int_1^2\frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u du=$$

$$\frac{1}{2}\left([u\ln u]_1^2-\int_1^2 u\cdot\frac{1}{u}du\right)=\frac{1}{2}(2\ln2-[u]_1^2)=\frac{1}{2}(2\ln2-1)=\ln2-\frac{1}{2}\ \text{τ. μ.}$$

Δ3. i. **<u>1ος τρόπος</u>**

Ισχύει ότι $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$

Τότε $\ln(x^2-2x+2)\geq \ln1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)\geq 0$

Επίσης $\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$.

Τελικά $f'(x)\geq -1$ και το "=" ισχύει μόνο για x=1.

<u>2ος τρόπος</u>

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+2\frac{(x-1)^2+1-1}{(x-1)^2+1}-1$$

$$=\ln(x^2-2x+2)+2\left(1-\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)-1$$

$$=\ln(x^2-2x+2)+1-2\frac{1}{(x-1)^2+1},\ x\in R$$

$$f''(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+2\frac{2(x-1)}{((x-1)^2+1)^2}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}+\frac{4(x-1)}{((x-1)^2+1)^2}$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f'(1)$, άρα $f'(x)\geq f'(1), x\in R$ δηλαδή $f'(x)\geq -1, x\in R$.

ii.

Αρκεί ν.δ.ο.

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$$

f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$

f παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

Από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Όμως, $f'(\xi)\geq-1\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}$

Δ4. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $K(x_1, f(x_1))$ και $\Lambda(x_2, g(x_2))$ τέτοια ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Κ και η εφαπτομένη της C_g στο Λ να ταυτίζονται.

Η εφαπτομένη της C_f στο Κ έχει εξίσωση (ε_1): $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

$y=f'(x_1)x-x_1\cdot f'(x_1)+f(x_1)$

Η εφαπτομένη της C_g στο Λ έχει εξίσωση (ε_2): $y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)$

$y=g'(x_2)x-x_2\cdot g'(x_2)+g(x_2)$

Οι ε_1 και ε_2 ταυτίζονται $\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x_1)=g'(x_2)\\-x_1f'(x_1)+f(x_1)=-x_2g'(x_2)+g(x_2)\end{cases}$

Έχουμε $f'(x)\geq-1$, $x\in R$ με το = να ισχύει μόνο στο 1.

$g'(x)=-3x^2-1\leq-1$, $x\in R$ με το = να ισχύει μόνο στο 0.

Άρα τα μοναδικά x_1, x_2 που ικανοποιούν την $f'(x_1)=g'(x_2)$ είναι τα $x_1=1$ και $x_2=0$

Και $-x_1\cdot f'(x_1)+f(x_1)=-f'(1)+f(1)=1+1=2$

$-x_2\cdot g'(x_2)+g(x_2)=g(0)=2$

Άρα οι C_f και C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την $y=-x+2$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα θέματα εξετάζουν ευρύ φάσμα της ύλης. Το θέμα Α παρουσιάζει διαφοροποίηση σε σύγκριση με αντίστοιχα των παρελθόντων ετών, αφού απαιτεί αιτιολόγηση. Τα θέματα Β και Γ εξετάζουν μεγάλο μέρος της ύλης σε βασικό επίπεδο αλλά και με σημεία που θέλουν προσοχή. Περισσότερες απαιτήσεις εμφανίζονται στα ερωτήματα Δ3, Δ4, που θα καθορίσουν τις υψηλές βαθμολογίες. Γενικά, τα σημερινά θέματα είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας και οδηγούν σε μια κλιμακούμενη και σωστή αξιολόγηση.