ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

http://www.othisi.gr

Τετάρτη, 16 Ιουνίου 2021
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $|ημx| < |x|$, για κάθε $x \in R^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$, κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φόρες παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή, M και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 135
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 51
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 23
Α4. **α)** Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$, για κάθε $x \in R$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{1-x}, x \in R$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) Το σύνολο τιμών της f (μονάδες 4)

(ii) Το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Για κάθε $x \in R$, έχουμε: $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$

Θέτουμε $\omega = x + 1 \Leftrightarrow x = \omega - 1$ οπότε προκύπτει $f(\omega) = \omega e^{1-\omega}, \omega \in R$

Άρα $f(x) = xe^{1-x}, x \in R$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(1-x), x \in R$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ αφού $e^{1-x} > 0$, για κάθε $x \in R$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο το $f(1)=1$.

Β3. Η f′ παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f''(x) = (e^{1-x})'(1-x) + e^{1-x}(1-x)' = e^{1-x}(1-x)'(1-x) - e^{1-x}$

$= -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}(1-x+1) = (x-2)e^{1-x}, x \in R$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, αφού $e^{1-x} > 0$, για κάθε $x \in R$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$	
$f''(x)$	$-$ 0	$+$
f	∩	∪

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και η C_f έχει σημείο καμπής το $A(2,f(2))$, δηλαδή το $A\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

- Η f είναι συνεχής σε όλο το R, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$

Άρα, η ευθεία (ε_1): $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\frac{1}{e^{x-1}}\right)=-\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}=0$ με $e^{x-1}>0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$

Η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4. (i) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,1]$, άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right]=(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, άρα

$f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(R)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]$.

(ii)
- Αν $\lambda\in(-\infty,0]$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και $\lambda\notin f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο Δ_1.
- Αν $\lambda\in(0,1)$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία ακριβώς ρίζα στο Δ_1 αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 και μία ακριβώς ρίζα στο Δ_2 αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2.
- Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x=1$ διότι το $f(1)$ είναι το μοναδικό ολικό μέγιστο.
- Αν $\lambda\in(1,+\infty)$, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα, αφού $\lambda\notin f(R)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3), αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x)\ge -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Για $x\neq 0$ η f είναι συνεχής λόγω της μορφής που έχει σε κάθε κλάδο.
Στο x=0 έχουμε:
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\alpha x^3-3x^2-x+1)=1=f(0)$ και
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$, άρα f συνεχής και στο $x_0=0$
Άρα, η f συνεχής στο R.
Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}(\alpha x^2-3x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

και αφού $0\neq -1$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. (i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

και $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

Επομένως, ικανοποιούνται δύο από τις συνθήκες του Θ. Rolle.

(ii) $f'(x)=0 \Leftrightarrow -ημx=0 \Leftrightarrow x=π$ δεκτή αφού $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$

Γ3. Έστω ότι υπάρχει $x_0 < 0$ ώστε $f'(x_0) = 0$ με

$$f'(x) = 3αx^2 - 6x - 1$$

άρα x_0 ρίζα της εξίσωσης $3αx^2 - 6x - 1 = 0$ που έχει διακρίνουσα

$$Δ = 36 + 12α = 12(3 + α) < 0, \text{αφού } α < -3 \ \Leftrightarrow α + 3 < 0$$

επομένως $f'(x_0) = 0$ αδύνατη, άρα άτοπο.

Γ4. Είναι $f'(x)=\begin{cases} 3αx^2-6x-1, & x<0 \\ -ημx, & 0<x<\frac{3π}{2} \end{cases}$

Για $x<0$ επειδή $3αx^2-6x-1$ έχει $Δ<0$ και $α<-3<0$ είναι $3αx^2-6x-1<0$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και επειδή f συνεχής στο $(-\infty,0]$ είναι f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Επίσης για $x\in\left(0,\frac{3π}{2}\right)$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -ημx=0 \Leftrightarrow ημx=0 \Leftrightarrow x=π$ έτσι

για $x\in(0,π)$ $f'(x)=-ημx<0$, f γν. φθίνουσα στο $[0,π]$ και

$f'(x)=-ημx>0$, $x\in\left(π,\frac{3π}{2}\right)$ και επειδή f συνεχής στο $\left[π,\frac{3π}{2}\right]$ είναι f γν. αύξουσα στο $\left[π,\frac{3π}{2}\right]$.

Έτσι έχουμε συνοπτικά:

x	$-\infty$		0		$π$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(π)$	$\nearrow$	

Έτσι f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,π]$ αφού f συνεχής στο $x_0=0$ και f γν. αύξουσα στο $[π,+\infty)$ επομένως $f(π)=-1$ ολικό ελάχιστο της f

άρα $f(x)\geq -1, x\in\left(-\infty,\frac{3π}{2}\right]$

β' τρόπος:

Από Γ3 έχουμε $f'(x) < 0$, $x < 0$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Για $x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 1 > -1$

Για $x > 0$ η $f(x) = συνx \geq -1$

Άρα $f(x) \geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3π}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x=\frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $(1,e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ έχει τύπο $f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x-1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=xe^{-x}, x\in R \quad \text{και} \quad h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x\in R$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to R$, συνεχής, με $f(x)>\varphi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$, με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Έχουμε:

$$\ln x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}=0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\kappa(x)=\ln x-\frac{1}{x}, x\in[1,e]$ που είναι συνεχής με

$$\kappa(1)=-1<0 \text{ και } \kappa(e)=1-\frac{1}{e}>0$$

οπότε $\kappa(1)\kappa(e)<0$ και σύμφωνα με Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε

$$\kappa(x_0)=0 \Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0} \ (1)$$

και επειδή $\kappa'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ η κ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ η $x_0\in(1,e)$ είναι μοναδική ρίζα της $\kappa(x)=0$.

Δ2. Είναι η $f(x)=(\ln x_0)(x+1)-\ln x-1$ με $x>0$ παραγωγίσιμη με

$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{xx_0}$ για κάθε $x>0$ και
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$
$f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; x-x_0>0 \;\Leftrightarrow x>x_0$ άρα f γν. αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$
$f'(x)<0 \;\Leftrightarrow\; x-x_0<0 \;\Leftrightarrow x<x_0$ άρα f γν. φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$
Έτσι έχουμε συνοπτικά τον παρακάτω πίνακα:

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

Οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)-\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=$
$x_0\ln x_0+\ln x_0-\ln x_0-1=1-1=0$

Δ3. Θεωρώντας την εξίσωση

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{e^x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \quad \text{επειδή} \quad \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$$

αναγκαία $\frac{x}{e^x}>0$ οπότε για x>0 ισοδύναμα έχουμε

$$\ln\frac{x}{e^x}=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x-\ln e^x=(x+1)(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln x_0-x-1 \Leftrightarrow$$

$0=(x+1)\ln x_0-\ln x-1 \Leftrightarrow f(x)=0$ που από Δ2 έχει μοναδική ρίζα το x_0.

Επίσης $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ και $h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\frac{x_0}{e}(x+1)$ ή

$$g'(x)=\frac{1-x}{e^x} \qquad \text{και} \quad h'(x)=h(x)\ln\frac{x_0}{e}$$

Είναι τώρα $g'(x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$ και $h'(x_0)=h(x_0)(\ln x_0-1)$

$h'(x_0)=h(x_0)(\ln x_0-1)$ $\qquad\qquad (h(x_0)=g(x_0)=\frac{x_0}{e^{x_0}})$

$$=\frac{x_0}{e^{x_0}}(\ln x_0-1)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\frac{1-x_0}{x_0}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}=g'(x_0)$$

που σημαίνει αφού $h(x_0)=g(x_0)$ και $h'(x_0)=g'(x_0)$ ότι οι C_h, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $(x_0, h(x_0))$.

Δ4. Η απόσταση $AB=d(x)=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)$, αφού $f(x)>\varphi(x)$ για x>0.
Αν η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 προφανώς x_0 κρίσιμο σημείο της φ. Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και x_0 εσωτερικό σημείο της συνάρτησης $d(x)$, τότε η d παραγωγίσιμη στο x_0 και αφού $x=x_0$ είναι η ελάχιστη απόσταση, οπότε σύμφωνα με Θ. Fermat ισχύει $d'(x_0)=0$ με $d'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0$ και αφού $f'(x_0)=0$ είναι $\varphi'(x_0)=0$ που σημαίνει x_0 κρίσιμο σημείο της φ.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα διακρίνονται για την ευρύτητα της εξεταζόμενης ύλης και θα είναι κατά το μεγαλύτερο μέρος τους προσπελάσιμα σε αυξημένο ποσοστό υποψηφίων .