ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΘΕΜΑΤΑ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

06 Ιουνίου, 2022

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών
https://www.othisi.gr/frontistirio/

Δευτέρα, 6 Ιουνίου 2022
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:
– όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c$$

όπου $c \in R$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
– κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c$$

με $c \in R$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μια συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = R - \{x / \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

ε. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 186
Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 142
Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 161
Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty, 1]\to R$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g: [0,+\infty)\to R$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h=fog$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x)=(x-1)^2, x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1–1 (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}, x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο [0, 1].

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in(0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=$ ημα, όπου $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. Για να ορίζεται η h πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$$

Οπότε, $D_h=[0, 1]$. Για $x \in [0,1]$ ορίζεται η συνάρτηση h με τύπο:

$$h(x)= (fog)(x)=f(g(x))=\left[(g(x))^2-1\right]^2=\left[(\sqrt{x})^2-1\right]^2=(x-1)^2$$

B2. 1ος τρόπος (για 1–1)

Η h είναι συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(0, 1)$ με $h'(x)= ((x-1)^2)'= 2(x-1)<0$,

άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 1], οπότε και «1–1» και συνεπώς αντιστρέψιμη.

2ος τρόπος (για 1−1)

Έστω $x_1, x_2 \in D_h$ με $h(x_1) = h(x_2)$, τότε:

$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \Leftrightarrow$

$|x_1-1| = |x_2-1| \overset{\substack{x_1-1<0 \\ x_2-1<0}}{\Leftrightarrow} -(x_1-1) = -(x_2-1) \Leftrightarrow$

$-x_1+1 = -x_2+1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [0,1] άρα

$h([0,1])=[h(1), h(0)]=[0,1]$

Είναι $D_{h^{-1}}=h(D_h)=[0,1]$.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y=h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y=(x-1)^2 \\ x\in[0,1] \\ y\in[0,1] \end{cases} \Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{y} \overset{x-1<0}{\Leftrightarrow} -x+1=\sqrt{y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$$

Άρα $h^{-1}(y)=1-\sqrt{y},\ y\in[0,1]$.

Τελικά $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$.

B3. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1)$

Η φ συνεχής στο [0,1) ως πηλίκο συνεχών και αφού $\lim\limits_{x\to1^-}\varphi(x)=\varphi(1)$, η φ είναι συνεχής στο [0, 1].

Επίσης, $\varphi(0)=1$, ενώ $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$, άρα $\varphi(0)\neq\varphi(1)$.

Οπότε, η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

ii) $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2} \underset{\text{γν.αυξ.στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{y=\etaμx}{\Leftrightarrow}} \etaμ\dfrac{\pi}{6}<\etaμ\alpha<\etaμ\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<\etaμ\alpha<1 \Leftrightarrow$

$\etaμ\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)=\left(\varphi(1),\varphi(0)\right)$ και επειδή η φ συνεχής στο $[0,1]$, από Θ.Ε.Τ

υπάρχει $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\etaμ\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f ʹ της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα yʹy στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα xʹx και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Για κάθε $x \in (-\infty,-1)$, έχουμε:

$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)' \overset{\Sigma\Theta MT}{\Rightarrow} f(x) = -2x + c_1, c_1 \in R$

Για κάθε $x \in (-1,+\infty)$, έχουμε:

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \overset{\Sigma\Theta MT}{\Rightarrow} f(x) = x^3 - x + c_2,\ \ c_2 \in R$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & \alpha\nu\ x<-1 \\ x^3 - x + c_2, & \alpha\nu\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & \alpha\nu\ x<-1 \\ c, & \alpha\nu\ x=-1 \\ x^3 - x + c_2, & \alpha\nu\ x>-1 \end{cases}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to-1^-}(-2x + c_1) = \lim_{x\to-1^+}(x^3 - x + c_2) = c \Leftrightarrow$$

$$2 + c_1 = -1 - (-1) + c_2 = c \Leftrightarrow c = c_2 = c_1 + 2\ \ (1)$$

Επίσης η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα:

$$O(0,0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0\ \ (2)$$

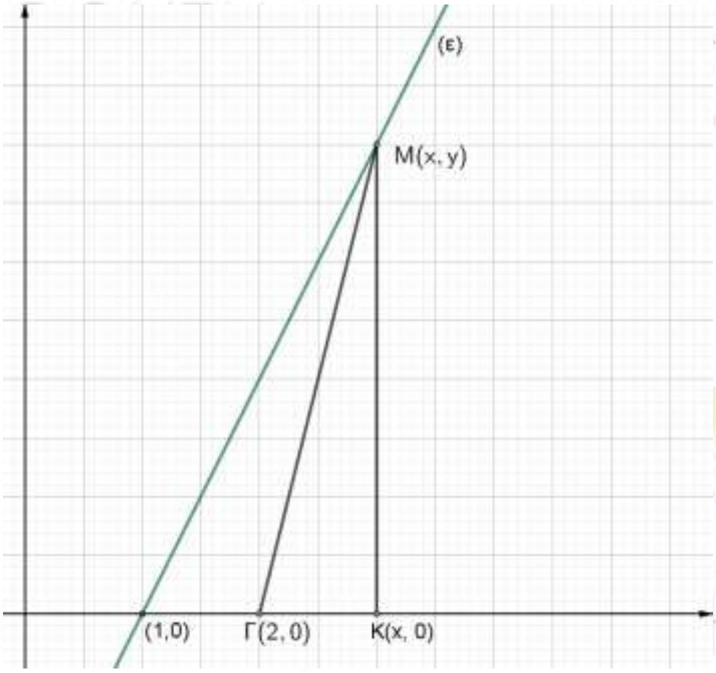
Επομένως από τις (1) και (2): $c = c_2 = 0$ και $c_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Γ2. Έστω (ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα y′y στο −2, οπότε:

$$(0,-2)\in(\varepsilon)\Leftrightarrow -2-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow$$
$$-2-f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)=f(x_0)+2\Leftrightarrow$$
$$x_0(3x_0^2-1)=x_0^3-x_0+2\Leftrightarrow 3x_0^3-x_0=x_0^3-x_0+2\Leftrightarrow$$
$$2x_0^3=2\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow x_0=1$$

Γ3.



Είναι:

$E_{ΜΓΚ}=\frac{1}{2}ΓΚ\cdot ΜΚ=\frac{1}{2}(x-2)y$, αφού

$ΓΚ=|x-2|=x-2$, αφού $x>2$

$ΜΚ=|y|=y$, αφού $y>0$

Άρα $E(x)=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$, με $x>2$

Είναι $E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$ για $t\ge 0$

και $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$ για $t\ge 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $x(t_0)=3$ μονάδες και $x'(t_0)=2$μον./sec άρα

$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6$ τμ/sec.

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

Και αφού $|ημf(x)|\le 1$, ισχύει :

$\left|\frac{ημf(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}$, άρα $-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{ημf(x)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|f(x)|}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$

άρα από Κ.Π. προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{1+u^3}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3-u}{1+u^3}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{u^3}=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1.$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x'x , να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2).$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση : $2f(x)+\ln3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. i) Είναι $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$, για κάθε $x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}<0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}x-1<0\Leftrightarrow 0<x<1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}>0\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

$$f(1) = 1 - \ln 3 = \ln\frac{e}{3} < 0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x - \ln 3x) = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln 3x \underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to 0^+}}{\overset{3x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - \ln 3x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln e^x - \ln 3x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{3x}\ (1)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{3x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{3} = +\infty$

Θέτουμε $u = \dfrac{e^x}{3^x} \begin{pmatrix} x \to +\infty \\ u \to +\infty \end{pmatrix}$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{(1)}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0,1]$ άρα

$f(A_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = \left[\ln\dfrac{e}{3}, +\infty\right)$

Ο αριθμός $0 \in f(A_1)$ και $f(1) = \ln\dfrac{e}{3} \neq 0$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$. Το x_1 μοναδικό αφού f γνησίως φθίνουσα στο A_1.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ άρα

$f(A_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[\ln\dfrac{e}{3}, +\infty\right)$

Ο αριθμός $0 \in f(A_2)$ και $f(1) = \ln\dfrac{e}{3} \neq 0$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$. Το x_2 μοναδικό αφού f γνησίως αύξουσα στο A_2.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii) Είναι $f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2} > 0, x > 0$ άρα f κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Είναι:

$$E=\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Για } x_1\le x\le 1 \overset{f\ \text{γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(x_1)=0 \\ \bullet\ \text{Για } 1\le x\le x_2 \overset{f\ \text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(x_2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\le 0, x\in[x_1,x_2]$$

Άρα:

$$E=\int_{x_1}^{x_2} -f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(\ln 3x-x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\ln 3x\,dx-\int_{x_1}^{x_2}x\,dx$$

$$I_1=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x\,dx=[x\ln 3x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\frac{1}{x}\,dx=x_2\ln 3x_2-x_1\ln 3x_1-x_2+x_1$$

Είναι:

$f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln 3x_1=0 \Leftrightarrow \ln 3x_1=x_1$

$f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2-\ln 3x_2=0 \Leftrightarrow \ln 3x_2=x_2$

Άρα:

$I_1=x_2^2-x_1^2-x_2+x_1$ και

$$I_2=\int_{x_1}^{x_2}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} E=I_1-I_2 &= x_2^2-x_1^2-x_2+x_1-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2} \\ &= \frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-x_2+x_1 \\ &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)-(x_2-x_1) \\ &= \frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2) \end{aligned}$$

Δ3. Το εμβαδόν είναι πάντα θετικό άρα,

$$E>0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0 \overset{x_2-x_1>0}{\Rightarrow} x_1+x_2-2>0 \Rightarrow 2-x_1<x_2$$

Είναι $x_1<1 \Leftrightarrow -x_1>-1 \Leftrightarrow 2-x_1>1$ και $x_2>1$ και f γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$

ισχύει $2-x_1<x_2 \overset{f\ \text{γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(2-x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f(2-x_1)<0.$

Δ4. Η εξίσωση $2f(x) + \ln 3x = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$$2f(x) + \ln 3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(1) + f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \quad (1)$$

Από Δ1 έχουμε ότι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Ακόμα, η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη στο x_2 είναι:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

και λόγω κυρτότητας $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$

με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$.

Έτσι από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$f(x) - f(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{και} \quad x = x_2$$

και αφού $1 < x_2$ προκύπτει ότι η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η σημερινή εξέταση αρχικά δείχνει έντονα μια αλλαγή φιλοσοφίας στην υφή των θεμάτων. Τα θέματα καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης και για την αντιμετώπιση τους θα χρειαστεί ιδιαίτερη κριτική και συνθετική ικανότητα στα ερωτήματα που θα διαμορφώσουν τις υψηλές βαθμολογίες.

Καλή επιτυχία!

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΩΘΗΣΗ

Αφετηρία το μέλλον