ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2014

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Παρασκευή, 30 Μαΐου 2014
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας,δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_o)=0$, για $x_o \in (\alpha, \beta)$, και η παράγωγός της f′ διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_o, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

β) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

δ) Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X, τότε η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i.

(μονάδες 2)

ε) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

(μονάδες 2)

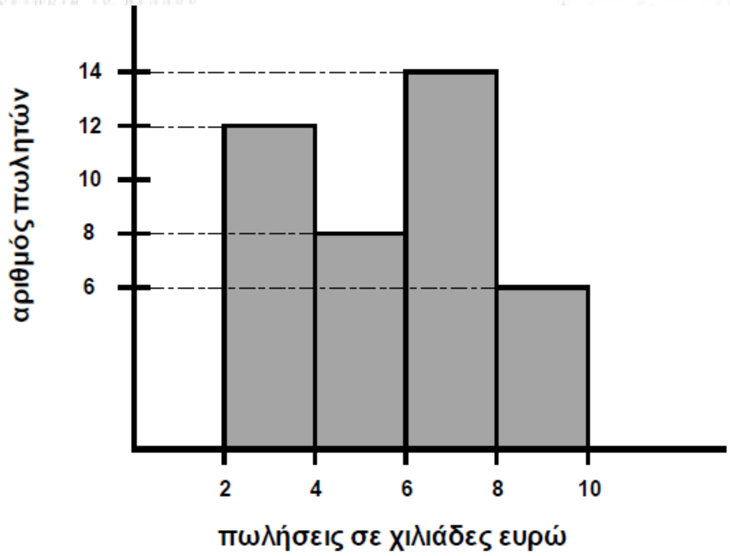
Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.30
Α2. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.13
Α3. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.59
Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



Β1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

Μονάδες 5

Β2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i, $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i
[,)			
[,)			
[,)			
[,)			
Σύνολο			

Μονάδες 8

Β3. **α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

(μονάδες 6)

Μονάδες 12

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων παρατηρούμε ότι:
$\nu_1=12$, $\nu_2=8$, $\nu_3=14$, $\nu_4=6$, οπότε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας είναι :
$\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=40$

Β2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
[2, 4)	3	12	0.3
[4, 6)	5	8	0.2
[6, 8)	7	14	0.35
[8 , 10)	9	6	0.15
Σύνολο	–	40	1

- $f_1=\dfrac{\nu_1}{\nu}=\dfrac{12}{40}=0,3$
- $f_2=\dfrac{\nu_2}{\nu}=\dfrac{8}{40}=0,2$
- $f_3=\dfrac{\nu_3}{\nu}=\dfrac{14}{40}=0,35$
- $f_4=\dfrac{\nu_4}{\nu}=\dfrac{6}{40}=0,15$

Β3. **α)** είναι: $\bar{x}=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i=\sum_{i=1}^{\kappa}x_if_i$

Άρα $\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_if_i=3\cdot0,3+5\cdot0,2+7\cdot0,35+9\cdot0,15=0,9+1+2,45+1,35=5,7$ χιλιάδες ευρώ.

β) 1ος τρόπος

έχουμε:
- $N_1=\nu_1=12$
- $N_2=\nu_1+\nu_2=20$
- $N_3=\nu_1+\nu_2+\nu_3=34$
- $N_4=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=40$

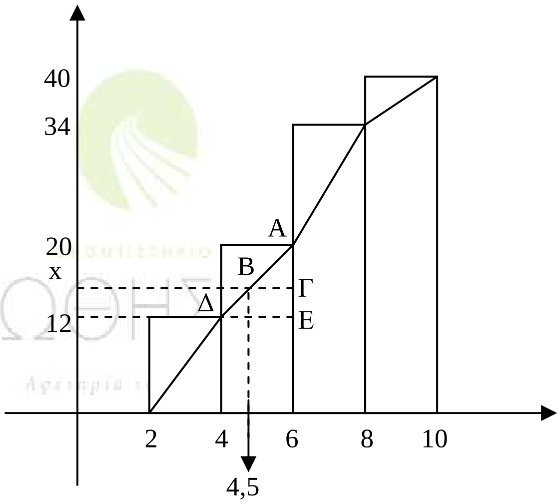
Κατασκευάζουμε το πολύγωνο N_i

Παρατηρούμε ότι $\overset{\Delta}{AB\Gamma}\approx\overset{\Delta}{A\Delta E}$, οπότε:

$$\frac{A\Gamma}{AE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}\Leftrightarrow\frac{20-x}{20-12}=\frac{6-4,5}{6-4}\Leftrightarrow\frac{20-x}{8}=\frac{1,5}{2}\Leftrightarrow 2(20-x)=1,5\cdot8$$

$\Leftrightarrow 40-2x=12\Leftrightarrow -2x=-28\Leftrightarrow x=14$

Από το πολύγωνο N_i παρατηρούμε ότι το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις έως 4,5 χιλιάδες ευρώ είναι 14, άρα το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ είναι $40-14=26$



2[ος] τρόπος

Επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες, το πλήθος των πωλητών που βρίσκονται στο διάστημα [4,5 , 6) είναι $\frac{3}{4}\nu_2=6$, επομένως το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ είναι

$\frac{3}{4}\nu_2+\nu_3+\nu_4=6+14+6=26$ πωλητές.

(ή $\nu-\nu_1-\frac{1}{4}\nu_2=26$)

ΘΕΜΑ Γ

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$f(x)=4x^3-\frac{7}{2}x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες P(Κ), P(Α) και P(Π), όπου P(Π) η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $P(K)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Για τη συνάρτηση $f(x)=4x^3-\frac{7}{2}x^2+x-1$, που είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική για $x\in R$ είναι: $f'(x)=12x^2-7x+1$.

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-7x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Delta=49-48=1$ οπότε έχει ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{7\pm1}{24}=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\\[4pt]\dfrac{1}{4}\end{cases}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	

Επειδή $x_1 < x_2$ έπεται πως

$x_1=\frac{1}{4}$ και $x_2=\frac{1}{3}$. Δηλαδή $P(K)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{1}{3}$.

Τότε επειδή $A\cup K\cup \Pi=\Omega$ και τα ενδεχόμενα είναι ανά δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους ισχύει ότι:

$P(A)+P(K)+P(\Pi)=1 \Leftrightarrow P(\Pi)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\Pi)=\frac{12-3-4}{12}=\frac{5}{12}$.

Γ2. **1ος τρόπος**

$\Gamma=(A\cup K)$: "επιλέγεται άσπρη ή κόκκινη μπάλα".

$\Delta=(A\cup K)'$: "επιλέγεται ούτε κόκκινη ούτε άσπρη ".

$E=(A\cup \Pi')$: "επιλέγεται άσπρη ή όχι πράσινη".

Άρα $P(\Gamma)=P(A)+P(K)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$

$P(\Delta)=P[(A\cup K)']=1-P(A\cup K)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

$P(E)=P(A\cup \Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap \Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A-\Pi)=$

$=P(A)+P(\Pi')-P(A)+P(A\cap\Pi')$

$=1-P(\Pi)=\frac{7}{12}$

2ος τρόπος

Γ. Επειδή $\Gamma=A\cup K=\Pi'$ είναι: $P(\Gamma)=P(A\cup K)=P(\Pi')=\frac{7}{12}$

Δ. Επειδή $\Delta=(A\cup K)'=\Pi$ είναι: $P(\Delta)=P[(A\cup K)']=P(\Pi)=\frac{5}{12}$

Ε. Επειδή $A \cup K \subseteq \Pi'$ οπότε $A \subseteq \Pi'$. Συνεπώς $E = A \cup \Pi' = \Pi'$

Τότε $P(E) = P(A \cup \Pi') = P(\Pi') = \frac{7}{12}$

Γ3. Ισχύει ότι: $N(A) = N(\Pi) - 4$ (1)

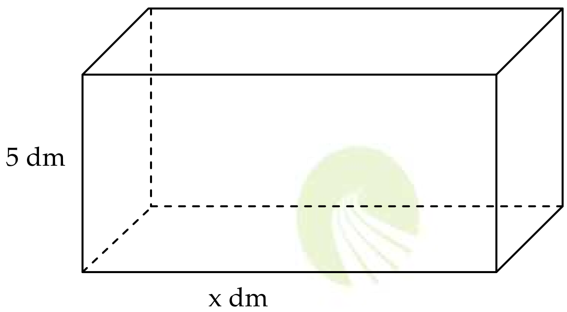
Τότε, καθώς $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(\Pi) = \frac{5}{12}$ (2), η (1) διαιρούμενη με $N(\Omega)$ γράφεται:

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} - \frac{4}{N(\Omega)} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} - \frac{4}{12} \Leftrightarrow \frac{4}{N(\Omega)} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow N(\Omega) = 48$$

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και **ανοικτό από πάνω**.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.
Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100,\ x \in (0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$, όπου $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 15$

$5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{14} < x_{15} = 9$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i, $i = 1, 2, \dots, 15$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x} = 8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $s = 2$

β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2, με $i = 1, 2, \dots 15$

Δίνεται ότι: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right]$

Μονάδες 8

Δ3. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2,\ldots,15$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$B = \{ A_i(x_i, y_i),\ i = 1, 2,\ldots,15$ τέτοια, ώστε $y_i > -4x_i + 9R + 1\}$,

όπου R είναι το εύρος των $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2,\ldots,15$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Έστω ότι οι πλευρές της βάσης του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι x, ψ. Τότε η περίμετρος της βάσης είναι Π=2x+2ψ και σύμφωνα με την υπόθεση Π=20 άρα $2x+2ψ=20 \Leftrightarrow x+ψ=10 \Leftrightarrow ψ=10-x$, $0<x<10$ (1).

Η επιφάνεια του κουτιού αποτελείται από τις τέσσερις παράπλευρες έδρες και την βάση διαστάσεων x dm ψ dm. Δύο από αυτές έχουν διαστάσεις 5 dm και ψ dm και οι άλλες δύο x dm και 5 dm.

Άρα η συνολική επιφάνεια

$E(x)=2(5ψ)+2(5x)+xψ$ λόγω (1)

$E(x)=10(10-x)+10x+x(10-x)$

$E(x)=-x^2+10x+100$, $x\in(0,10)$

Για την εύρεση της τιμής του x που έχει μέγιστη επιφάνεια μελετούμε την μονοτονία της συνάρτησης $E(x)=-x^2+10x+100$, $x\in(0,10)$ που είναι παραγωγίσιμη με $E'(x)=-2x+10$

Είναι $E'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+10=0 \Leftrightarrow x=5$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow -2x+10>0 \Leftrightarrow -2x>-10 \Leftrightarrow x<5$ άρα E γνήσια αύξουσα στο (0,5].

$E'(x)<0 \Leftrightarrow -2x+10<0 \Leftrightarrow -2x<-10 \Leftrightarrow x>5$ άρα E γνήσια φθίνουσα στο [5,10).

Άρα στο x=5 η επιφάνεια γίνεται μέγιστη.

Δ2. α) Επειδή $2s^2-5s+2=0$ έχουμε $Δ=25-16=9$

Άρα ρίζες $s_{1,2}=\dfrac{5\pm3}{4}=\begin{cases}2\\ \dfrac{1}{2}\end{cases}$

Επειδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές CV>0,1 οπότε $\dfrac{s}{\bar{x}}>\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\dfrac{s}{8}>\dfrac{1}{10} \Leftrightarrow s>\dfrac{4}{5}$ επομένως δεκτή ρίζα s=2.

β) Η μέση τιμή των x_1^2 με i=1, 2, …,15 είναι $μ=\dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15}$

Σύμφωνα με τον τύπο $s^2=\dfrac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{15} x_i\right)^2}{15^2} \Leftrightarrow s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}-\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}-\overline{x}^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}=s^2+\overline{x}^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15}=68 \Leftrightarrow \mu=68.$$

Δ3. Για την εύρεση του R σύμφωνα με το (Δ1) έχουμε:

αφού $5=<x_1<x_2<\ldots<x_{15}=9$ τότε λόγω του ότι E γν. φθίνουσα στο [5,10) θα ισχύει $E(x_1)>E(x_2)>\ldots>E(x_{15})$ δηλαδή

$\psi_1>\psi_2>\ldots>\psi_{15}$

Επομένως $R=\psi_1-\psi_{15}=E(x_1)-E(x_{15})=E(5)-E(9)=125-109=16$

Για το ενδεχόμενο B πρέπει $\psi_1>-4x_i+9R+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E(x_i)>-4x_i+9\cdot 16+1 \Leftrightarrow -x_i^2+10x_i+100>-4x_i+145 \Leftrightarrow$

$-x_i^2+14x_i-45>0 \Leftrightarrow x_i^2-14x_i+45<0$ (2)

έχει $\Delta=14^2-4\cdot 45=196-180=16$

ρίζες $\varrho_{1,2}=\frac{14\pm 4}{2}=\begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$

οπότε η (2) επαληθεύεται $x_i \in (5,9)$

Άρα $B=\{x_2, x_3, \ldots, x_{14}\}$ άρα $N(B)=13$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{13}{15}$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα έχουν διαμορφωθεί, στο σύνολο τους, σύμφωνα με τις απαιτήσεις του σχολικού βιβλίου. Καλύπτουν όλο το εύρος της εξεταστέας ύλης με σαφήνεια ως προς τα ζητούμενα και χωρίς μαθηματικές παγίδες. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα οι επιδόσεις των υποψηφίων να είναι σαφώς υψηλότερες σε σύγκριση με τα προηγούμενα έτη.