ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2015

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Τετάρτη, 20 Μαΐου 2015
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),\ x\in R$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \dots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α και Β ισχύει $CV_B>CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα Β εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα Α.

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β» δηλώνει ότι $A\subseteq B$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 22

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 86–87

Α4. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Έστω Α, Β και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, $A\cap B$ και $A\cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'-B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου
Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

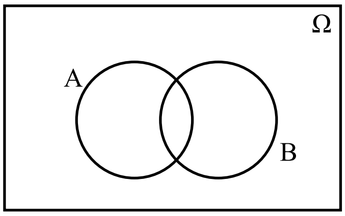
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Έχουμε $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$

$3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$, με $\Delta=(-6)^2-4\cdot8\cdot1=36-32=4>0$

$x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{6+\sqrt{4}}{2\cdot8}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{6-\sqrt{4}}{2\cdot8}=\frac{1}{4}$

άρα το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι $L=\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$.



- Επειδή $A\cap B\subseteq A$ τότε $P(A\cap B)\le P(A)$ (1) και
  $A\subseteq A\cup B$ τότε $P(A)\le P(A\cup B)$ (2)

τότε από (1), (2), ισχύει:

$P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

Επειδή οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(A\cup B)$ ανήκουν στο σύνολο L και $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$, $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ τότε ισχύει $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2. Επειδή ισχύει $A'-B'=A'\cap(B')'=B\cap A'=B-A$

οπότε $P(A'-B')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ (3)

- Όμως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow$

  $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B) \Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \Rightarrow P(B)=\frac{5}{12}$ (4)

  Από τις (3), (4) έχουμε:

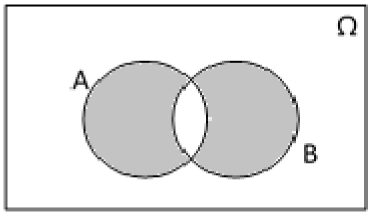
  $P(A'-B')=P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

  Είναι $\Delta=(A\cap B)'$ άρα

  $P(\Delta)=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3. Είναι $E=(A-B)\cup(B-A)$ με $A-B$, $B-A$ ασυμβίβαστα.

Από τον Απλό Προσθετικό Νόμο, έχουμε:



$P(E)=P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

Άρα $P(E)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=$

$=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Β4. Έχουμε $9x^2-3x-2=0$.

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 9(-2)=9+8\cdot 9=9^2$

Άρα $x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9^2}}{2\cdot 9}=\frac{3\pm 9}{18}=\begin{cases}\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\\ \frac{-6}{18}=-\frac{1}{3}\end{cases}$

Άρα $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε από τον Απλό Προσθετικό Νόμο, έχουμε $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma) \Leftrightarrow P(B\cup\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(B\cup\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{8}{12} \Leftrightarrow$

$P(B\cup\Gamma)=\frac{13}{12}$, άτοπο από τον ορισμό της πιθανότητας. Άρα τα ενδεχόμενα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα Ι, όπου $f_i\%$, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.

- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108^o.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=14$.

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 10$, $f_3\% = 30$, $f_4\% = 20$, $f_5\% = 30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1 , x_2 , x_3 και x_4 τα κέντρα της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα και ν_1 , ν_2 , ν_3 και ν_4 οι συχνότητες της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης κλάσης αντίστοιχα.

Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Γ4. Έστω α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση.

Εάν $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για i=1, 2, 3, 4, 5, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i, i=1, 2, 3, 4, 5 είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1.

Κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$	$x_i f_i$
[8, 10)	**9**	**0,1**	**10**	**0,9**
[10, 12)	**11**	**0,1**	**10**	**$11f_2$**
[12, 14)	**13**	**0,3**	**30**	**3,9**
[14, 16)	**15**	**0,2**	**20**	**$15f_4$**
[16,18)	**17**	**0,3**	**30**	**5,1**
Σύνολο	**-**	**1**	**100**	**-**

Έχουμε σύμφωνα με την υπόθεση $f_1\% = 10\%$, $f_5\% = 30\%$, $\alpha_3 = 108^o$

Είναι $\alpha_3 = 360 \cdot f_3$ άρα $f_3 = \frac{108^o}{360^o} = 0,3$ οπότε $f_3\% = 30\%$

Ακόμη είναι $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14$

$\Leftrightarrow 0,9 + 3,9 + 5,1 + 11f_2 + 15f_4 = 14 \Leftrightarrow 0,9 + 3,9 + 5,1 + 11f_2 + 15f_4 = 14$

$\Leftrightarrow 9,9 + 11f_2 + 15f_4 = 14 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 4,1$ **(1)**

Όμως $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Rightarrow 0,7 + f_2 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \Leftrightarrow f_4 = 0,3 - f_2$ **(2)**

οπότε $(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} 11f_2 + 15(0,3 - f_2) = 4,1 \Leftrightarrow 11f_2 + 4,5 - 15f_2 = 4,1 \Leftrightarrow -4f_2 = 4,1 - 4,5$

$\Leftrightarrow -4f_2 = -0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$

Άρα $f_4 = 0,2$.

Γ2. Είναι $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$ άρα $s^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow s^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 f_i$

$\Leftrightarrow s^2 = (9-14)^2 \cdot 0,1 + (11-14)^2 \cdot 0,1 + (13-14)^2 \cdot 0,3 + (15-14)^2 \cdot 0,2 + (17-14)^2 \cdot 0,3$

$\Leftrightarrow s^2 = 25 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 + 0,3 + 0,2 + 9 \cdot 0,3 \Leftrightarrow s^2 = 6,6$

Άρα $s = \sqrt{6,6} \cong 2,57$

Είναι $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$ άρα $CV = \frac{2,57}{14} \cong 0,18357 > 0,1$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + x_5 \nu_5\right) \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i + \frac{1}{\nu} x_5 \nu_5$

$\Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + \frac{17\nu_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17f_5 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot 0,3$

$\Leftrightarrow 14 - 5,1 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow 8,9 = \frac{1780}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 200$.

Γ4. Έχουμε $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{s_\alpha}$, i =1, 2, 3, 4, 5

άρα $\beta_i = \frac{1}{s_\alpha}\alpha_i - \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}$

Αν $\omega_i = \frac{1}{s_\alpha}\alpha_i$ τότε από εφαρμογή σχολικού βιβλίου

έχουμε $\bar{\omega} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}$ και $s_\omega = \frac{1}{s_\alpha}s_\alpha = 1$

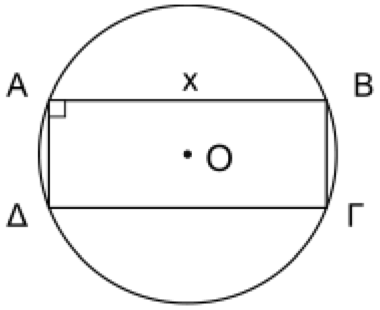
Τότε $\beta_i = \omega_i - \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}$, από εφαρμογή σχολικού βιβλίου

έχουμε $\bar{\beta} = \bar{\omega} - \frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}$ και $s_\beta = s_\omega$

Άρα $\bar{\beta}=\frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}-\frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}=0$ και $s_\beta=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=x, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2}$, $0<x<10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}$

Μονάδες 8

Δ4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν Ρ(Α-Β)>0, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Μονάδες 8

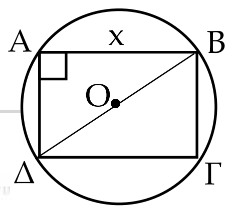
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Αφού $\hat{A}=90^O$ τότε ΒΔ διάμετρος.

Στο ορθογώνιο $\Delta\hat{A}B$ ($\hat{A}=90^O$) σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$AB^2+A\Delta^2=B\Delta^2 \Leftrightarrow x^2+A\Delta^2=(2\rho)^2 \Leftrightarrow$

$A\Delta^2=10^2-x^2 \Leftrightarrow A\Delta=\sqrt{100-x^2}$, (1)



Πρέπει $x>0$ (λόγω της ΑΒ) και $100-x^2>0 \Leftrightarrow x<10$ (λόγω της (1))

Τότε το εμβαδόν ισούται με $E=AB\cdot A\Delta \Leftrightarrow E=x\cdot\sqrt{100-x^2}$.

Συνεπώς το εμβαδόν δίνεται από τη συνάρτηση:

$f(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2}$, $x\in(0,10)$

Δ2. • $f'(x)=x'\cdot\sqrt{100-x^2}+x\cdot(\sqrt{100-x^2})'=\sqrt{100-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot(100-x^2)'=$

$=\sqrt{100-x^2}+\frac{x}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot(-2x)=\sqrt{100-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}=$

$=\frac{\sqrt{100-x^2}^{\,2}-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$, $x\in(0,10)$

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow 100-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2=50 \Leftrightarrow x=5\sqrt{2}$

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow 100-2x^2>0 \Leftrightarrow x^2<50 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$	10
f′(x)		+	−	
f		↗	↘	

Άρα η συνάρτηση εμβαδού γίνεται μέγιστη όταν $x=5\sqrt{2}$

Όταν $x=5\sqrt{2} \Leftrightarrow AB=5\sqrt{2}$

τότε $A\Delta=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Δηλαδή ΑΒ=ΑΔ, οπότε ΑΒΓΔ τετράγωνο.

Δ3. **<u>Α′ τρόπος</u>**

Είναι $\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\cdot\frac{1}{98}$

Επειδή η $f(x)=x\sqrt{100-x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0,10) με

$f'(x)=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$ το $f'(1)=\frac{100-2}{\sqrt{99}}=\frac{98}{\sqrt{99}}$

οπότε $f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{98}{\sqrt{99}}$

Άρα $\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}\cdot\frac{1}{98}=\frac{98}{\sqrt{99}}\cdot\frac{1}{98}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$

<u>Β΄τρόπος</u>

έχουμε ότι $f(x)=x\cdot\sqrt{100-x^2}$, τότε

$f(1+x)=(1+x)\cdot\sqrt{100-(1+x)^2}=(1+x)\cdot\sqrt{99-2x-x^2}=\sqrt{99-2x-x^2}+x\cdot\sqrt{99-2x-x^2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{99-2x-x^2}+x\sqrt{99-2x-x^2}-\sqrt{99}}{98\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{x\sqrt{99-2x-x^2}}{98\cdot x}+\frac{\sqrt{99-2x-x^2}-\sqrt{99}}{98x}\right]=$$

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{99-2x-x^2}}{98}+\frac{\sqrt{99-2x-x^2}^{\,2}-\sqrt{99}^{\,2}}{98x(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99})}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{99-2x-x^2}}{98}+\frac{99-2x-x^2-99}{98x(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99})}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{99-2x-x^2}}{98}+\frac{x(-2-x)}{98x(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99})}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{99-2x-x^2}}{98}+\frac{-2-x}{98(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99})}\right]=\frac{\sqrt{99}}{98}+\frac{-2}{98\cdot 2\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{98}+\frac{-1}{98\cdot\sqrt{99}}=$$

$$=\frac{99-1}{98\sqrt{99}}=\frac{98}{98\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4. <u>**Α′ τρόπος**</u>

Επειδή $A-B\subseteq A$ έπεται πως $P(A-B)\le P(A)$ συνεπώς $0<P(A-B)\le P(A)\le 1$

η f στο (0,1] είναι γνησίως αύξουσα άρα $f(P(A-B))\le f(P(A)) \Leftrightarrow$

$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$

$$\underset{\sqrt{100-P^2(A)}>0}{\overset{\sqrt{100-P^2(A-B)}>0}{\Rightarrow}} \quad \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \quad \textbf{(1)}$$

Είναι $0<P(A-B)\le P(A)\le 1$

και $P(A-B)\le P(A)$ **(2)**

οπότε $P^2(A-B)\le P^2(A)\le 1$

$0>-P^2(A-B)\ge -1$

$100>100-P^2(A-B)\ge 100-P^2(A)\ge 99$

$10>\sqrt{100-P^2(A-B)}\ge\sqrt{100-P^2(A)}\ge\sqrt{99}>0$

$$\frac{1}{\sqrt{99}}\le\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}<\frac{1}{10} \quad \textbf{(3)}$$

επειδή $0<P(A)\le 1$ **(4)**

και από **(3)** $\Rightarrow 0<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<\dfrac{1}{10}$

Από **(3), (4)** πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη ανισότητες της ίδιας φοράς με όλα τους τα μέλη θετικά

$$0<\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<\frac{P(A)}{10}\le\frac{1}{10}<5\sqrt{2}$$

Άρα $0<\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<5\sqrt{2}$

Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $(0,5\sqrt{2}]$

είναι $f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$

Β΄τρόπος

Ισχύει ότι (Α–Β)⊆Α⇔ 0<Ρ(Α–Β)≤Ρ(Α)

Αν Α–Β≠Α, έχουμε

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} < \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \ \textbf{(1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P^2(A-B)}{100-P^2(A)} < \frac{P^2(A)}{100-P^2(A-B)} \Leftrightarrow$$

$100P^2(A-B)-P^4(A-B)<100P^2(A)-P^4(A) \Leftrightarrow 100(P^2(A-B)-P^2(A))<P^4(A-B)-P^4(A)$

$\Leftrightarrow 100(P^2(A-B)-P^2(A))< (P^2(A-B)-P^2(A))(P^2(A-B)+P^2(A))$

$\Leftrightarrow 100>P^2(A-B)+P^2(A)$ ισχύει αφού $0<P(A)\le 1 \Leftrightarrow 0<P(A-B)\le 1$ οπότε ισχύει και (1).

Έχουμε

$$\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 5\sqrt{2} \ \textbf{(2)} \Leftrightarrow \frac{P^2(A)}{100-P^2(A-B)} < 50 \Leftrightarrow P^2(A)<5000-50P^2(A-B)\Leftrightarrow$$

$51P^2(A)<5000 \Leftrightarrow P^2(A)<\frac{5000}{51} \Leftrightarrow P(A)<\frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{51}}$, προφανώς ισχύει αφού:

$\left(\frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{51}}>1 \Leftrightarrow 50\sqrt{2} > \sqrt{51} \Leftrightarrow 2500\cdot 2 >51 \Leftrightarrow 5000>51\right)$

Οπότε ισχύει η (2).

Από **(1), (2):** $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} < \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 5\sqrt{2}$

f γνησίως αύξουσα στο $(0,\ 5\sqrt{2})$⇒ ισχύει η ζητούμενη.

Αν Α–Β=Α τότε $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} = \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$ οπότε

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) = f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα διακρίνονται ως προς την κλιμάκωση της δυσκολίας των ερωτημάτων και την ποιοτική τους ανάπτυξη. Σε κάποια ερωτήματα απαιτείται αλγεβρική ευχέρεια, πράγμα που πιθανόν να έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία επίτευξης άριστων επιδόσεων.