ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ
Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

www.othisi.gr

Παρασκευή, 20 Μαΐου 2016
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν Α και Α′ είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητές τους ισχύει:

$$P(A')=1-P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) \leq P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150–151

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.14

Α4. **α)** Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της A(0,f(0)).

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Είναι $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1$, $x\in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο R με $f'(x)=x^2-5x+6$, $x\in R$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x<2$ ή $x>3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Η f παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο 2 το $f(2)=\frac{8}{3}-10+12-1=\frac{11}{3}$ και (τοπικό) ελάχιστο στο 3 το $f(3)=\frac{7}{2}$.

Β2. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$y=f'(0)x+\beta$ με $f'(0)=6$ και $f(0)=-1$.

Άρα είναι $y=6x+\beta$ και αφού το σημείο επαφής είναι το A(0,−1) τότε για x=0 και y=−1 έχουμε β=−1.

Άρα η εφαπτομένη είναι η ε: $y=6x-1$.

Β3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-6)=-7$

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:
Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»
Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»
Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$Δ=Α\cap Β,\ Ε=Α\cup Β,\ Ζ=Γ-Ε$$

(μονάδες 9)

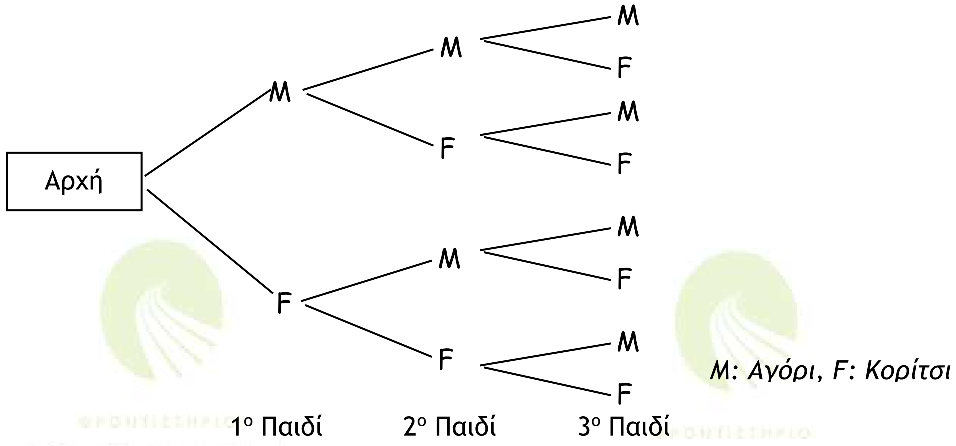
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β»
Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Αν "Μ" είναι το ενδεχόμενο να γεννηθεί αγόρι και "F" το ενδεχόμενο να γεννηθεί κορίτσι τότε προκύπτει το παρακάτω δενδροδιάγραμμα.



Άρα Ω={MMM, MMF, MFM, MFF, FMM, FMF, FFM, FFF}

Γ2. Α={FMM, FMF, FFM, FFF}

B={MFF, FMF, FFM, FFF}
Γ={MMM, MMF, FFM, FFF}

Γ3. **α)** Είναι:

- $Δ=A∩B=\{FMF, FFM, FFF\}$ με $N(Δ)=3$.
  Άρα $P(Δ)=\frac{N(Δ)}{N(Ω)}=\frac{3}{8}$.
- $E=A∪B=\{FMM, FMF, FFM, FFF, MFF\}$
  Άρα $P(E)=\frac{N(E)}{N(Ω)}=\frac{5}{8}$.
- $Z=Γ-E=\{MMM, MMF\}$
  Άρα $P(Z)=\frac{N(Z)}{N(Ω)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

β) $H=(A∪B)'=\{MMM, MMF, MFM\}$

Άρα $P(H)=\frac{N(H)}{N(Ω)}=\frac{3}{8}$.

$Θ=(A-B)∪(B-A)$
$A-B=\{FMM\}$
$B-A=\{MFF\}$
Άρα $Θ=\{FMM, MFF\}$, οπότε $P(Θ)=\frac{N(Θ)}{N(Ω)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν ν υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα $ν_i$
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		$ν_4$
Σύνολο		ν=…….

Δ1. Να αποδείξετε ότι c=4 .

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}$ =14 να αποδείξετε ότι $ν_4 = 5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι s=4 και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Επειδή το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης είναι 8 ενώ η κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης είναι $x_2=14$, ισχύει ότι:

$8+c+\frac{c}{2}=14 \Leftrightarrow \frac{3c}{2}=6 \Leftrightarrow c=4.$

Δ2. Για τη μέση τιμή των χρόνων ισχύει $\bar{x}=\frac{\Sigma x_i \nu_i}{\nu}$ είναι $\frac{\Sigma x_i \nu_i}{\nu}=14$ (1)

Καθώς το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι c=4 οι κλάσεις είναι [8, 12), [12, 16), [16,20), [20,24) με αντίστοιχες κεντρικές τιμές

$x_1=10$, $x_2=14$, $x_3=18$, $x_4=22$

Συνεπώς η (1) γίνεται:

$\frac{10\cdot\nu_1+14\cdot\nu_2+18\cdot\nu_3+22\cdot\nu_4}{\nu}=14 \Leftrightarrow \frac{10\cdot 20+14\cdot 15+18\cdot 10+22\cdot\nu_4}{20+15+10+\nu_4}=14 \Leftrightarrow 200+210+$

$180+22\cdot\nu_4=(45+\nu_4)\cdot 14 \Leftrightarrow 590+22\cdot\nu_4=630+14\cdot\nu_4 \Leftrightarrow 8\nu_4=40 \Leftrightarrow \nu_4=5.$

Ο πίνακας είναι:

Χρόνος	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[20,24)	22	5
Σύνολο	–	50

Δ3. <u>Α΄ τρόπος</u>

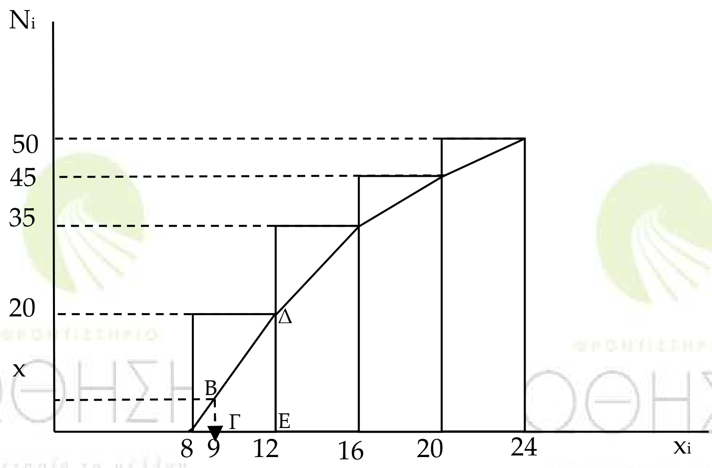
Οι συχνότητες του δείγματος έχουν ως εξής:

$\nu_1=20$, $\nu_2=15$, $\nu_3=10$, $\nu_4=5$

και οι αντίστοιχες αθροιστικές είναι

$N_1=20$, $N_2=35$, $N_3=45$, $N_4=50$

και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι:



Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ΑΒΓ} \approx \overset{\Delta}{ΑΔΕ}$ είναι μεταξύ τους όμοια, συνεπώς:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ} \Leftrightarrow \frac{9-8}{4} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 5$$

Άρα τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν 45 υπολογιστές.

<u>Β' τρόπος</u>

Αφού οι παρατηρήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες και το διάστημα 8–9 είναι το $\frac{1}{4}$ της πρώτης κλάσης, $\frac{1}{4}v_1 = \frac{1}{4}\cdot 20 = 5$ υπολογιστές χρειάστηκαν το πολύ 9 λεπτά. Άρα, 50–5=45 υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά.

Δ4. Επειδή η μέση τιμή του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$, είναι:

$$s^2 = \frac{1}{v}\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i =$$

$$= \frac{(10-14)^2\cdot 20 + (14-14)^2\cdot 15 + (18-14)^2\cdot 10 + (22-14)^2\cdot 5}{50}$$

$$= \frac{16\cdot 20 + 16\cdot 10 + 64\cdot 5}{50} = \frac{320+160+320}{50} = \frac{80}{5} = 16$$

Άρα s^2=16, οπότε s=4.

και τότε CV=$\frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{2}{20} = 0.1$, άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Δ5. Προκύπτει νέο δείγμα τιμών $y_i=0.8x_i$, i=1, 2,…,50 άρα από εφαρμογή σχολικού είναι $\bar{y} = 0{,}8\bar{x}$ και $s_y=0{,}8s_x$.

Άρα για την ομοιογένεια CV_y του νέου δείγματος ισχύει ότι:

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{0.8\,s_x}{0.8\,\bar{x}} = CV_x = \frac{2}{7}$$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν αλλάζει συνεπώς και το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Το κύριο χαρακτηριστικό των σημερινών θεμάτων είναι ότι εξετάζουν βασικές γνώσεις από όλα τα κεφάλαια της ύλης, με τρόπο διακριτό χωρίς συνδυασμό δεδομένων. Τα ερωτήματα είναι διατυπωμένα με σαφήνεια και στηρίζονται στην ασκησιολογία του σχολικού βιβλίου. Αυτό που θα καθορίσει τις υψηλές βαθμολογίες είναι η ικανότητα του υποψηφίου στη διαχείριση του υπολογιστικού μέρους κάθε ερωτήματος.