ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

http://www.othisi.gr

Τετάρτη, 17 Ιουνίου 2020
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΝΕΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R, ισχύει $f'(x)>0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής.**

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $\nu\in N$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται, αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}, x\in R$ έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

δ) Η εικόνα **f(Δ)** ενός διαστήματος **Δ** μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο R και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x'x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της $\mathbf{C_f}$, του οποίου η απόσταση από τον άξονα **x'x** είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 76

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 104

Α3. **α)** Ψ

β) Θεωρία σχολικού βιβλίου, σχόλιο σελ. 136

Α4. **α)** Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f: (1,+\infty) \to R$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g: R \to R$, με τύπο $g(x)=e^x$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(fog)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε οτι η συνάρτηση fog είναι 1–1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)= (fog)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συναρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β3, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $f:(1,+\infty)\to R$ με $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και $g:R\to R$ με $g(x)=e^x$

Β1. $D_{fog}:\begin{cases} x\in D_g \\ \text{και} \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \text{και} \\ e^x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \text{και} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$ άρα $D_{fog}=(0,+\infty)$

$(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0$

Β2. $(fog)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων

$(fog)'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$ άρα η fog γν.φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

οπότε και 1–1και συνεπώς αντιστρέψιμη.

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(το όριο υπολογίζεται και με χρήση του κανόνα DLH)

$$\lim_{x\to0^+}(fog)(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{e^x-1}(e^x+2)\right]=+\infty,\quad \text{γιατί } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{e^x-1}=+\infty,\ \lim_{x\to0^+}(e^x+2)=3$$

$$(fog)((0,+\infty))\underset{\text{και συνεχής}}{\overset{\text{fog γν.φθίνουσα}}{=}}\left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x),\lim_{x\to0^+}(fog)(x)\right)=(1,+\infty)$$

Για $x\in(0,+\infty)$ και $y\in(1,+\infty)$ έχουμε:

$$y=(fog)(x)\Leftrightarrow y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow(y-1)e^x=y+2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$\ln e^x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{y-1},\ \text{άρα } (fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),\ D_{(fog)^{-1}}=(1,+\infty)$$

2ος τρόπος

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ τότε

$$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2}-2$$

$\Leftrightarrow 3e^{x_2}=3e^{x_1}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα fog 1–1 στο $(0,+\infty)$

$$y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow y\cdot e^x-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{y+2}{y-1}$$

πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\ \text{όμως } x>0\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0=\ln1\Leftrightarrow\frac{y+2}{y-1}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{y+2-y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow\frac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y>1\ \text{οπότε } (fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),x>1$$

B3. $\varphi(x)=(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$, παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων

$$\varphi'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)'=(\ln(x+2)-\ln(x-1))'=$$

$$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x-2}{(x+2)(x-1)}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0 \text{ για κάθε } x>1,$$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

B4. Έστω $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, τότε $\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{x-1}(x+2)\right]=+\infty$

Άρα για $x\to1^+$ το $u\to+\infty$.

Οπότε:

$\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

Έστω $u=\dfrac{x+2}{x-1}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)=1$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}, \text{ με } \lambda>0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha\le0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς και στο $x_0=0$,

θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

$f(0)=1-\ln\lambda$

Για $x<0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$

και για $x>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=0+\lambda\cdot 1=\lambda$

Άρα $\lambda=1-\ln\lambda \Leftrightarrow \lambda+\ln\lambda-1=0$ (1)

Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα την $\lambda=1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x+\ln x-1$, $x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ (αφού $x>0$), άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

άρα και «1–1» και καθώς η εξίσωση $g(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$, τότε η $x=1$ είναι η μοναδική της ρίζα.

Άρα η f συνεχής μόνο για $\lambda=1$.

Γ2. Ο τύπος γίνεται

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Για $x<0$, ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\frac{\frac{x}{1-x}}{x}=\frac{1}{1-x}$$

με $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$

Για $x>0$, ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$$

με $\left.\begin{aligned}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0\end{aligned}\right\}$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1+0=1$

Οπότε, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

Τότε $f'(0)=εφω \Rightarrow 1=εφω \Leftrightarrow εφ\frac{π}{4}=εφω$

Γ3. Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων.
Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
Στο $x_0=0$ είναι παραγωγίσιμη (Γ2) με $f'(0)=1$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $Δ=\left(-\infty,\frac{3π}{2}\right)$.
Για $x<0$, η $f'(x)=-\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)'$ ή $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$
με $f'(x)\neq 0$ για $x\in(-\infty,0)$.
Για $x>0$ η $f'(x)=συνx-ημx$.

Η $f'(x)=0 \Leftrightarrow συνx-ημx=0 \Leftrightarrow συνx=ημx \overset{(*)}{\Leftrightarrow} συνx=συν\left(\frac{π}{2}-x\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=2κπ+\frac{π}{2}-x \\ \text{ή} \\ x=2κπ-\frac{π}{2}+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2κπ+\frac{π}{2} \\ \text{ή} \\ 0x=2κπ-\frac{π}{2}, \quad \text{Αδύνατη} \end{cases}$$

Άρα $2x=κπ+\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{4}, κ\in Z$

Τότε πρέπει:

$0<x<\frac{3π}{2} \Leftrightarrow 0<κπ+\frac{π}{4}<\frac{3π}{2} \Leftrightarrow -\frac{π}{4}<κπ<\frac{3π}{2}-\frac{π}{4} \Leftrightarrow$

$-\frac{π}{4}<κπ<\frac{5π}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<κ<\frac{5}{4}$

Άρα, κ=0, δηλαδή $x=\frac{π}{4}$

ή κ=1, δηλαδή $x=π+\frac{π}{4} \Leftrightarrow x=\frac{5π}{4}$

Συνεπώς μοναδικά κρίσιμα σημεία *είναι* $x=\frac{π}{4}$ και $\frac{5π}{4}$.

(∗)συντομότερα $ημx=συνx \overset{συνx\neq 0}{\Leftrightarrow} εφx=1 \Leftrightarrow x=\frac{π}{4}$ ή $x=\frac{5π}{4}$, αφού $x\in\left(0,\frac{3π}{2}\right)$

Γ4. Το σημείο $M(α,f(α))\in C_f$ και καθώς $α\leq 0$ ισχύει ότι $M\left(α,\frac{1}{1-α}\right)$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(α,\frac{1}{1-α}\right)$ έχει εξίσωση

$$y-f(α)=f'(α)(x-α)$$

$$y-\frac{1}{1-α}=\frac{1}{(1-α)^2}(x-α) \quad (2)$$

Για τις συντεταγμένες του σημείου Β που είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα x'x θέτουμε $y=0$ στη (2) οπότε γίνεται,

$$0-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\overset{\alpha\leq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$-1=\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Leftrightarrow -1+\alpha=x-\alpha\Leftrightarrow x=2\alpha-1$$

Άρα το σημείο Β του x'x έχει συντεταγμένες $B(2\alpha-1,0)$ οπότε ως έκφραση του χρόνου t είναι: $x_B(t)=2\alpha(t)-1$ οπότε παραγωγίζοντας

$$x'_B(t)=2\alpha'(t)\Rightarrow x'_B(t)=2\cdot\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right)\Rightarrow x'_B(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t) \quad (3)$$

Την χρονική στιγμή t_0 με $\alpha(t_0)=-1$ η (3) γίνεται

$$x'_B(t_0)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)\Leftrightarrow x'_B(t_0)=-\frac{2}{3}(-1)\Leftrightarrow x'_B(t_0)=\frac{2}{3}\ \mu/\chi\rho\acute{o}\nu o$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ για $x\in(x_0,1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0)>f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k\in(\rho,1)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Είναι f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με
$f'(x)=e^x+2x-e$ συνεχής στο R, άρα και στο $[0,\pi]$
με $f'(0)=1+0-e=1-e<0$
$f'(1)=e+2-e=2>0$
Ισχύει $f'(0)\cdot f'(1)<0$ και σύμφωνα με Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$
Επίσης $f''(x)=e^x+2>0$ άρα f' είναι γνησίως αύξουσα επομένως και «1−1» άρα x_0 μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου f’ και μεταβολών της f αφού για $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για $x > x_0$, $f'(x) > f'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'(x)	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$ min	$\nearrow$

Οπότε σύμφωνα με αυτόν η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$$

και επειδή $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ άρα

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

2ος τρόπος

Για την ύπαρξη ρίζας της εξίσωσης $f'(x) = 0$ μπορεί να γίνει χρήση του Θεωρήματος Rolle για την f στο [0, 1] όπως παρακάτω:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0, 1] ως πράξεις συνεχών.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,1) ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= e^0 + 0 - e\cdot 0 - 1 = 0 \\ f(1) &= e + 1 - e - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ δηλαδή } f(0) = f(1)$$

Άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ με $f'(x_0) = 0$.

Δ2. Είναι:

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x - x_0}$$

Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει

$$-1 \leq \eta\mu\frac{1}{x - x_0} \leq 1 \Rightarrow$$

$$-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x - x_0} \leq 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

Άρα:

$g(x) \geq \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$ (1) και επειδή $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, το $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστή πρόταση από (1) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Δ3. Είναι $h(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$ συνεχής ως πράξεις συνεχών

$h(1) = f(1) + 1 - x_0 = e + 1 - e - 1 = 1 - x_0 > 0$

$h(x_0) = f(x_0) < 0$, γιατί $x_0 < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0$

Οπότε, $h(1)h(x_0)<0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$.
Επίσης:

$x_0<x_1<x_2<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)$, οπότε

$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$

$h(x_1)-x_0<h(x_2)-x_0$

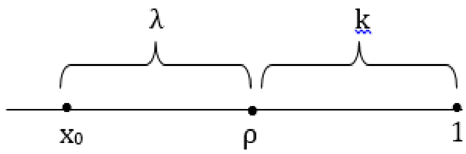
$h(x_1)<h(x_2)$, η h γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$

άρα ρ μοναδική ρίζα της $h(x)=0$.

Ή για την μοναδικότητα $h'(x)=f'(x)+1>0$, γιατί για $x>x_0$, $f'(x)>0$, άρα η h γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$, οπότε ρ μοναδική ρίζα

Δ4. Είναι $f(\rho)+\rho=x_0 \Rightarrow f(\rho)=x_0-\rho$

$f(x_0)>(x_0-\rho)(f'(k)+1)$



$\dfrac{f(x_0)}{x_0-\rho}<f'(k)+1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x_0)}{x_0-\rho}-1<f'(k) \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x_0)-x_0+\rho}{x_0-\rho}<f'(k) \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(k)$

Για την f στο $[x_0,\rho]$
f συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ)
Σύμφωνα με Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\lambda)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$$

Οπότε ισοδύναμα $f'(\lambda)<f'(\kappa)$ που ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\lambda<\kappa$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα κάλυψαν με επάρκεια όλη την εξεταστέα ύλη έχοντας την σωστή κλιμάκωση δυσκολίας ώστε να παραχθούν με αξιόπιστο τρόπο οι αναγκαίες διαβαθμίσεις μεταξύ των υποψηφίων. Κατά την άποψη μας, επιβραβεύουν εκείνους που μελέτησαν λεπτομερειακά και ενίσχυσαν την ικανότητα αυτενέργειας μέσω της εξάσκησης τους σε δύσκολα θέματα.