ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

http://www.othisi.gr

Τετάρτη, 17 Ιουνίου 2020
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΠΑΛΑΙΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.

(μονάδα 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι **σωστή**, ή **ΛΑΘΟΣ** αν η πρόταση είναι **λανθασμένη.**

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 111
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 104
Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 74
Α4. α) Ψ
β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$
Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$
Όμως, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, οπότε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.
Α5. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}, x\in R-\{3\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $R-\{3\}$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in R-\{3\}$.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}, x\neq 3$

Β1. Έστω $x_1, x_2\in R-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$
$\dfrac{3x_1+1}{x_1-3}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-3}\Rightarrow(3x_1+1)(x_2-3)=(x_1-3)(3x_2+1)\Rightarrow$
$3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Rightarrow$
$-10x_1=-10x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η f είναι «1–1» συνάρτηση, οπότε η f αντιστρέφεται στο $R-\{3\}$.

Β2. Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη, έχουμε:

$y=f(x) \Rightarrow y=\frac{3x+1}{x-3} \Rightarrow y(x-3)=3x+1 \Rightarrow yx-3y=3x+1 \Rightarrow yx-3x=3y+1 \Rightarrow$

$x(y-3)=3y+1 \overset{y-3\neq 0}{\Rightarrow} x=\frac{3y+1}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{3y+1}{y-3}, y\neq 3$

Αφού $x\neq 3 \Leftrightarrow \frac{3y+1}{y-3}\neq 3 \Rightarrow 3y+1\neq 3y-9 \Rightarrow 1\neq -9$, ισχύει

Άρα, $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3}, x\neq 3$

Επειδή

$D_f=D_{f^{-1}}=R-\{3\}$ και $f(x)=f^{-1}(x)$, για κάθε $x\neq 3$, τότε οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

B3. (α' τρόπος)

Επειδή οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες, ισχύει

$f(x)=f^{-1}(x)$, για κάθε $x\neq 3 \Rightarrow f(f(x))=f(f^{-1}(x)) \Rightarrow (fof)(x)=x$, για κάθε $x\neq 3$

(β' τρόπος)

$D_{fof}=\{x\in D_f \ / \ f(x)\in D_f\}=\left\{x\in R-\{3\} / \frac{3x+1}{x-3}\in R-\{3\}\right\}=\left\{x\neq 3 \ / \ \frac{3x+1}{x-3}\neq 3\right\}=$
$R-\{3\}\neq\varnothing$

Αφού $\frac{3x+1}{x-3}\neq 3 \Rightarrow 3x+1\neq 3(x-3) \Rightarrow 3x+1\neq 3x-9 \Rightarrow 1\neq -9$, ισχύει για κάθε $x\neq 3$

Οπότε η συνάρτηση fof ορίζεται με τύπο:

$(fof)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right)=\frac{3\frac{3x+1}{x-3}+1}{\frac{3x+1}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x+3}{x-3}+1}{\frac{3x+1-3(x-3)}{x-3}}=\frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}}=$
$=\frac{10x}{10}=x, x\neq 3$

B4. Είναι:

$\left|f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|=|f(x)|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq|f(x)|\cdot 1 \Rightarrow \left|f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right|\leq|f(x)| \Rightarrow$
$-|f(x)|\leq f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\leq|f(x)|$ (1)

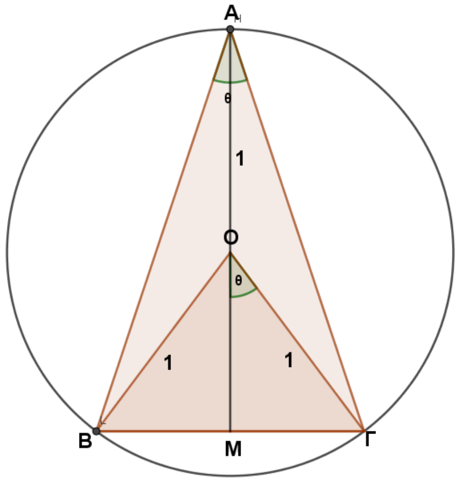
- $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(-\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|\right)=0$ (2)
- $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)|=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|=0$ (3)

Από (1), (2), (3) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right)=0$

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ= ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι :
$E(\theta) = (1+\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta,\ \theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2 του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι ΒΓ= 2ΒΜ, αφού ΒΟΓ ισοσκελές με ΒΟ=ΟΓ=1, άρα ισχύει
$B\hat{O}M = M\hat{O}\Gamma = \hat{\theta}$, αφού $M\hat{O}\Gamma = B\hat{A}\Gamma = \hat{\theta}$

Άρα ΟΜ διχοτόμος του $\overset{\Delta}{B O \Gamma}$ οπότε είναι και ύψος όπως και διάμεσος, δηλαδή ΑΜ ύψος του $\overset{\Delta}{A B \Gamma}$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ ισχύει : $\text{ημ}\theta = \frac{BM}{OB} = BM$.

άρα $B\Gamma = 2BM = 2\text{ημ}\theta$ (1)

Είναι ΑΜ= ΑΟ+ΟΜ, οπότε στο τρίγωνο ΒΟΜ ισχύει : $\text{συν}\theta = \frac{OM}{BO} = OM$

Άρα $AM = AO + OM = 1 + \text{συν}\theta$ (2)

Επομένως, $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AM$

Από (1),(2)

$E_{ΑΒΓ}= E(θ)=\frac{1}{2}2ημθ(1+συνθ)=ημθ(1+συνθ)$, με $θ\in(0,π)$,

(αφού $B\widehat{A}Γ=\hat{θ}$ γωνία τριγώνου)

Γ2. Η Ε είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$E'(θ)=συνθ(1+συνθ)+ημθ(-ημθ)=συνθ+συν^2θ-ημ^2θ=$

$=συνθ+συν^2θ-1+συν^2θ= 2συν^2θ+συνθ-1= 2(συνθ+1)\left(συνθ-\frac{1}{2}\right), θ\in(0,π)$

$E'(θ)=0 \Leftrightarrow συνθ=\frac{1}{2}$ αφού $συνθ+1>0, θ\in(0,π)$

$\Leftrightarrow συνθ= συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow x= 2κπ\pm\frac{π}{3}$

και αφού $θ\in(0,π)$ άρα $θ=\frac{π}{3}$

$E'(θ)>0 \Leftrightarrow 2(συνθ+1)\left(συνθ-\frac{1}{2}\right)>0 \overset{συνθ+1>0}{\Leftrightarrow} συνθ>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$συνθ>συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow θ<\frac{π}{3}$

αφού συνx γνησίως φθίνουσα στο $(0,π)$.

$θ$	0	$\frac{π}{3}$	$π$
$E'(θ)$	$+$	0	$-$
$E(θ)$	$\nearrow$		$\searrow$

Άρα για $θ=\frac{π}{3}$ το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται .

Γ3. Αν $Δ_1=\left(0,\frac{π}{3}\right]$ η Ε συνεχής και γνησίως αύξουσα, τότε

$E(Δ_1)=\left(\lim_{θ\to0^+}E(θ), E\left(\frac{π}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

Αφού $\lim_{θ\to0^+}E(θ)=\lim_{θ\to0^+}(1+συνθ)ημθ=0$

$E\left(\frac{π}{3}\right)=\left(1+συν\frac{π}{3}\right)ημ\frac{π}{3}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Αν $Δ_2=\left[\frac{π}{3},π\right)$ τότε αφού η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα τότε

$E(Δ_2)=\left(\lim_{θ\to π^-}E(θ), E\left(\frac{π}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

$\lim_{θ\to π^-}E(θ)=\lim_{θ\to π^-}(1+συνθ)ημθ=0$

Το $\frac{3}{4}\in E(Δ_1)$, εφόσον $\frac{3}{4}<\frac{3\sqrt{3}}{4}$ άρα υπάρχει μοναδική (λόγω μονοτονίας) γωνία $θ_1\in Δ_1$ ώστε

$$E(θ_1)=\frac{3}{4}$$

Το $\frac{3}{4} \in E(\Delta_2)$ άρα υπάρχει μοναδική (λόγω μονοτονίας) γωνία $\theta_2 \in \Delta_2$ ώστε

$$E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$

Υπάρχουν επομένως, δύο ακριβώς γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι ίσο με $\frac{3}{4}$.

Γ4. Η Ε είναι συνεχής στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$

παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$:

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \ (1)$$

Η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$:

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow E'(\xi_2)\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

άρα

$$E'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \ (2)$$

Από (1), (2) είναι

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = E'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x)$, $x\in(0+\infty)$, $\lambda\in(0,+\infty)$ και

$g(x)=x^x$, $x\in(0,+\infty)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x=1, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακροτάτου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda=1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} x^x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

(Μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x)=x\ln x-\ln(\lambda x)$, $x>0$, $\lambda>0$

$g(x)=x^x$, $x>0$

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{\lambda x}\lambda=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$

Άρα η f′ είναι γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα της $f'(x)=0$ η οποία είναι μοναδική αφού η f′ είναι γν. αύξουσα οπότε και ″1–1″ στο $(0,+\infty)$.

Για $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1) \Rightarrow f'(x)>0$

Για $x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1) \Rightarrow f'(x)<0$

x	0		1		+∞
f′(x)		–	0	+	
f		↘		↗	

Η f είναι συνεχής στο (0,1] και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0,1].

Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=-\ln\lambda$ στη θέση $x_0=1$.

Το σημείο του ακρότατου της f είναι το $A(1,-\ln\lambda)$

Έστω M(x,y) τυχαίο σημείο της ευθείας στην οποία ανήκει το σημείο Α καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0,+\infty)$.

Τότε $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\ln\lambda, \lambda > 0 \end{cases}$ όπου $y \in R$, αφού $-\ln\lambda \in R$ για κάθε $\lambda > 0$

Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η κατακόρυφη με εξίσωση $x=1$.

Δ2. Έχουμε ότι $x^x \geq \lambda x$ για κάθε $x>0$

$\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x^x \geq \ln(\lambda x)$

$\Leftrightarrow x\ln x \geq \ln(\lambda x)$

$\Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Εφόσον $f(x) \geq 0$ για κάθε $x>0$ θα ισχύει ότι και το ολικό ελάχιστο της $f(x)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Οπότε $\min f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\ln\lambda \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0$

$\Leftrightarrow \lambda \leq 1$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι η $\lambda_{max} = 1$.

Δ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$

Έστω x_o η θέση του σημείου επαφής της εφαπτομένης (ε) της C_g που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Είναι (ε): $y - g(x_o) = g'(x_o)(x - x_o)$

$y - x_o^{x_o} = x_o^{x_o}(\ln x_o + 1)(-x_o)$

τότε $0 - x_o^{x_o} = x_o^{x_o}(\ln x_o + 1)(-x_o)$

$\Leftrightarrow -1 = (\ln x_o + 1)(-x_o)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_o} = \ln x_o + 1$

$\Leftrightarrow 0 = \ln x_o + 1 - \dfrac{1}{x_o}$

$\Leftrightarrow 0 = f'(x_o)$

$\overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow} x_o = 1$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

(ε): $y - g(1) = g'(1)(x-1)$

$\Rightarrow y - 1 = x - 1$

$\Rightarrow y = x$

$\Rightarrow y = 1 \cdot x$

$\Rightarrow y = \lambda x$

Δ4. Έχουμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

i) Είναι $h(0) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

Θέτουμε $u = x\ln x$

Όταν το $x \to 0^+$ τότε:

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Οπότε το όριο γίνεται: $\lim\limits_{u\to 0^-} e^u = e^0 = 1$

άρα $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$ οπότε η h είναι συνεχής στο 0.
Η h είναι συνεχής και στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων $(e^x, x\ln x)$ αφού $x^x = e^{x\ln x}$
Επομένως η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

ii) Θέτουμε $I= \int_0^1 h(1-t)dt$.

Θέτουμε $u= 1-t$, τότε $\frac{du}{dt} = -1$, άρα $dt= -du$
Αν t=1 τότε u=0
Αν t=0 τότε u=1

Άρα $I= -\int_1^0 h(u)du= \int_0^1 h(u)du$

Θεωρύμε $k(x)=x^{2020}(3-2\int_1^2 g(t)dt)+(1-x)\int_0^1 h(u)du$ με $x\in[0, 1]$
Η k είναι συνεχής στο [0, 1] ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

- $k(0)=\int_0^1 h(u)du>0$ διότι η h είναι συνεχής στο [0,1] και $h(u)>0$ για κάθε $x\in[0, 1]$
- $k(1)=3-2\int_1^2 g(t)dt<0$ διότι η g είναι κυρτή στο [1, 2]

με $g'(x)= x^x(\ln x+1)$

$g''(x)=x^x\cdot(\ln x+1)^2+x^x\frac{1}{x}>0$ στο (1, 2)

Εφόσον η g είναι κυρτή στο [1, 2] και η y=x εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$
Έχουμε ότι $g(x)\geq x$ για κάθε $x\in[1, 2]$.

Και η ισότητα ισχύει μόνο για x=1
Άρα:

$$\int_1^2 g(x)\,dx > \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Άρα:

$$2\int_1^2 g(x)\,dx-3>0 \Leftrightarrow 3-2\int_1^2 g(x)\,dx<0$$

Επομένως, $k(1)\cdot k(0)<0$
Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα
$x_0(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\kappa(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^{2020}\cdot\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x_0)\int_0^1 h(1-t)dt=0$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται από αυξημένη δυσκολία σε σχέση με τα προηγούμενα χρόνια. Καλύπτουν με σαφήνεια όλη την εξεταστέα ύλη αλλά είναι αρκετά τα ερωτήματα που απαιτούν συνδυαστική σκέψη, μελέτη σε βάθος όλης της ύλης και μαθηματική οξυδέρκεια.