ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2015

Επιμέλεια:
Τομέας Μαθηματικών
της Ώθησης

Δευτέρα, 25 Μαΐου 2015
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε fog=gof.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

δ) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

ε) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.194

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 188

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 259

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4| = 2|z-1|$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 μιγαδικοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) ο w είναι πραγματικός και

(Μονάδες 4)

β) $-4 \le w \le 4$

(Μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν w=–4, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B_2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3,, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

άρα τα M(z) ανήκουν σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας ρ=2.

Β2. **(α' τρόπος)**

α) Έχουμε $|z_1|=2$ και $|z_2|=2$

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=\frac{2z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{2z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{2z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}+\frac{2z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}=$$

$$=\frac{2z_1\bar{z}_2}{4}+\frac{2z_2\bar{z}_1}{4}=\frac{z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}{2}=\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2})=\frac{1}{2}2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2), \text{άρα } w\in R.$$

β) Έχουμε ότι w=$\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$ άρα $|w|=|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}|\le|\frac{2z_1}{z_2}|+|\frac{2z_2}{z_1}|=\frac{2|z_1|}{|z_2|}+\frac{2|z_2|}{|z_1|}=4$

άρα $\left.\begin{matrix}|w|\le 4\\ w\in R\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow -4\le w\le 4$

(β′ τρόπος)

$|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{4}{z_1}$ Ομοίως $|z_2|=2 \Leftrightarrow \bar{z}_2=\frac{4}{z_2}$

Έχουμε: $\overline{w}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=2\frac{4z_2}{4z_1}+2\frac{4z_1}{4z_2}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w$

Άρα $w=\overline{w} \Leftrightarrow w\in R$

Β3. Έχουμε: $w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4$

$\Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$

$(ΒΓ)=|z_3-z_2|=|2iz_1+z_1|=|z_1|\,|1+2i|=2\sqrt{5}$

$(ΑΓ)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1|\,|1-2i|=2\sqrt{5}$

$(ΓΒ)=(ΓΑ)=2\sqrt{5} \Rightarrow$ ΓΑΒ ισοσκελές με ΓΑ=ΓΒ.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x}\cdot(x^2+1))=\frac{e^2}{5}$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ακριβώς μια ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x)$ για κάθε x>0.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt & ,x>0\\ 2 & ,x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων

με $f'(x)=\dfrac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$

η $f'(x)>0$ για x≠1 και $f'(x)=0$ μόνο για x=1 στο οποίο η f είναι συνεχής

άρα f γνησίως αύξουσα στο R

Τότε για Δ=(−∞,+∞) το f(Δ)= $(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(0,+\infty)$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

Οι συναρτήσεις e^x, x^2+1, $2x$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο R.

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$

Γ2. $f[e^{3-x}(x^2+1)]=\dfrac{e^2}{5}$

Επειδή $f(2)=\dfrac{e^2}{5}$ και f γνησίως αύξουσα στο R και άρα «1−1» είναι

$f[e^{3-x}(x^2+1)]=f(2)\Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\dfrac{e^3}{e^x}=\dfrac{2}{x^2+1}\Leftrightarrow\dfrac{e^3}{2}=\dfrac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^3}{2}$

Επειδή $\dfrac{e^3}{2}\in f(\Delta)=(0,+\infty)$ έπεται πως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\Delta$ με

$f(x_0)=\dfrac{e^3}{2}$ το οποίο είναι μοναδικό λόγω μονοτονίας της f στο R.

Γ3. $\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt<2xf(4x)$

θεωρώ $g(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt$, α>0

η f(t) είναι συνεχής στο R συνεπώς $\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής

τότε στο διάστημα [2x, 4x] και για x>0 η g είναι συνεχής,

στο (2x, 4x) παραγωγίσιμη

άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(2x, 4x)

με $g'(\xi)=\dfrac{g(4x)-g(2x)}{4x-2x}=\dfrac{\int_{\alpha}^{4x}f(t)\,dt-\int_{\alpha}^{2x}f(t)\,dt}{2x}=\dfrac{\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt}{2x}$

τότε $2x<\xi<4x$ και επειδή η $g'(x)=f(x)$ γνησίως αύξουσα άρα για $\xi<4x$

$g'(\xi)<g'(4x)\Leftrightarrow\dfrac{\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt}{2x}<f(4x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\int_{2x}^{4x}f(t)\,dt<2xf(4x)$.

Γ4. $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$

Η g(x) για x>0 είναι παραγωγίσιμη αφού η f(t) είναι συνεχής στο R άρα και στο (0,+∞) και τότε η $\int_{2x}^{4x} f(t)dt=\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt$, $\alpha\in(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη καθώς 4x παραγωγίσιμη άρα $\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων και ομοίως 2x παραγωγίσιμη άρα $\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων. Επίσης η $\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) ως ρητή συνεπώς g(x) παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με g′(x)=

$$\frac{\left(\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt\right)'x-(x)'\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$

$$\frac{[4f(4x)-2f(2x)]x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$

$$\frac{\left(2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)+2x[f(4x)-f(2x)]}{x^2}>0$$

Αφού $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$ από Γ3 ερώτημα και 2x>0 και f(4x)−f(2x)>0 καθώς για $4x>2x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(4x)>f(2x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$ και $x^2>0$. Άρα, g′(x)>0 για x>0 συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞).

Επειδή όμως

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt}{x}\ \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\ \lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x} f(t)dt\right)'}{(x)'}=$$

$\lim_{x\to0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}\ \overset{f\text{ συνεχής στο }0}{=}\ 4f(0)-2f(0)=2f(0)=2\cdot1=2=g(0)$, άρα η g συνεχής στο 0 και οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞).

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2$ για κάθε $x \in R$ και
- $f(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ell n(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in R$

Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες x=0 και x=1.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ell n\,|f(x)|\right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $f'(x)[e^{f(x)}+e^{-f(x)}]=2$, $x\in R$

$e^{f(x)}f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=2$

$(e^{f(x)}-e^{-f(x)})' = (2x)'$, $x\in R$

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$, $x\in R$, $c\in R$

για x=0 $e^{f(0)}-e^{-f(0)}=c$

$1-1=c \Leftrightarrow c=0$

Άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$, $x\in R$

$e^{f(x)} - \dfrac{1}{e^{f(x)}} = 2x$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2-2xe^{f(x)}-1=0$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)})^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1$

$\Leftrightarrow (e^{f(x)}-x)^2=x^2+1$, $x\in R$

Θεωρώ $g(x)=e^{f(x)}-x$, $x\in R$ (1)

Τότε $g^2(x)=x^2+1$, $x\in R$.

Έστω $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow g^2(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^2+1=0$ άτοπο άρα $g(x)\neq 0$ για $x\in R$ και συνεχής στο R άρα η g(x) διατηρεί πρόσημο στο R και αφού $g(0)=e^{f(0)}=1>0$ έχουμε $g(x)>0$ για $x\in R$

Άρα η (1) μας δίνει $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in R$

$$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}$$

$$e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1},\quad x\in R$$

έχουμε $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$, $x\in R$

άρα $\sqrt{x^2+1}+x>0$, $x\in R$

και άρα $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in R$

Δ2. α) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=-\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0 \overset{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}>0}{\Leftrightarrow} -x>0 \Leftrightarrow x<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
f	$\cup$		$\cap$

Άρα η f κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$

με σημείο καμπής το $(0, f(0))$ δηλαδή $(0,0)$

β) $f(0)=0$, $f'(0)=1$

η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ δηλαδή $y=x$

Η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη στο O(0,0)(εκτός του σημείου επαφής) άρα $f(x)\leq x$, $x\geq 0$

(με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$)

$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)-x|\,dx=\int_0^1(-f(x)+x)dx=-\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 x\,dx=$$

$$=-\int_0^1(x)'\,f(x)\,dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-[x\,f(x)]_0^1+\int_0^1 x\,f'(x)\,dx+\frac{1}{2}=$$

$$=-f(1)+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\frac{1}{2}=-\ln(1+\sqrt{2})+\int_0^1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx+\frac{1}{2}=$$

$$=-\ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1+\frac{1}{2}=-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}=-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

Δ3. **(α′ τρόπος)**

Κοντά στο 0 για $x>0$

Θεωρώ $h(x)=\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}f(x)\ell n|f(x)|$

• η $K(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R αφού η f^2 είναι συνεχής στο R, $0\in R$ άρα για $x\in R$ η K παραγωγίσιμη με $K'(x)=f^2(x)$

άρα και συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 0}e^{K(x)}=e^{K(0)}=1$

• $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)'}{f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}{f'(x)}\underset{f'\ \text{συνεχής}}{\overset{f\ \text{συνεχής}}{=}}\frac{1\cdot f^2(0)}{f'(0)}=0$$

• $$\lim_{x\to 0^+}[f(x)\ell n|f(x)|]\underset{\substack{\lim_{x\to0^+} f(x)=0\\ \text{για } x>0\\ \Leftrightarrow f(x)>f(0)\\ \Leftrightarrow f(x)>0}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0^+}u\ell nu=\lim_{u\to 0^-}u\ell nu=\lim_{u\to 0^+}\frac{\ell nu}{\frac{1}{u}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n|f(x)|\right]=0\cdot 0=0$

Δ3. **(β′ τρόπος)**

Από Δ2 $f'(x)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα για $x>0$ άρα $f(x)>f(0)$ οπότε $f(x)>0$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ell n(f(x))=-\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ell nf(x)}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}{-\frac{1}{\ell n^2f(x)}\frac{f'(x)}{f(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^3(x)\ell n^2f(x)}{-f'(x)}$$

Έχουμε $$\lim_{x\to 0^+}f^3(x)\ell n^2f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ell n^2f(x)}{\frac{1}{f^3(x)}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ell nf(x)\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{f^6(x)}3f^2(x)f'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ell nf(x)f^6(x)}{-3f^3(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ell nf(x)}{-\frac{3}{f^3(x)}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{f'(x)}{f(x)}}{9\frac{f^2(x)f'(x)}{f^6(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{9}f^3(x)=0$$

Τότε $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\dfrac{1}{\ell nf(x)}}=\dfrac{1\cdot 0}{-1}=0$

Δ4. Θεωρώ $\mu(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x}f^2(t)dt\right]$, $x\in[2,3]$ η μ είναι συνεχής στο [2,3] ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $\mu(2)=-\left[8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right]=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$
- $\mu(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

Έχουμε $0<f(t)\le t,\ \ t\ge 0$

Άρα $f^2(t)\le t^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 0

$$\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}$$

$$3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0$$

Για $t>0$ έχουμε $f(t)>f(0)=0$ άρα $0<f(t)\le t,\ t\ge 0$

Για $t=t^2$ έχουμε $0<f(t^2)\le t^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 0

άρα $\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt\Rightarrow$

$$\int_0^1 f(t^2)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\frac{1}{3}\Rightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0.$$

Επομένως $\mu(2)<0$ και $\mu(3)>0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $\mu(x_0)=0$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται για τη σαφήνεια των ερωτημάτων και καλύπτουν ευρύ φάσμα της ύλης.

Ειδικότερα:

Τα θέματα Α, Β είναι προσπελάσιμα από την πλειοψηφία των υποψηφίων.

Το θέμα Γ είναι κλιμακούμενης δυσκολίας και απαιτούσε αρκετό χρόνο για την πλήρη αιτιολόγηση των λεπτομερειών. Συνέπεια αυτού ήταν η συμπίεση του χρόνου ενασχόλησης με το θέμα Δ.

Στο θέμα Δ τα δυο πρώτα ερωτήματα αντιμετωπίζονται από τους καλά προετοιμασμένους υποψηφίους, ενώ τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 απαιτούσαν ιδιαίτερη ικανότητα, αυτενέργεια και ευρηματικότητα.

Συμπερασματικά, η έκταση του Γ θέματος και η ιδιαιτερότητα των ερωτημάτων Δ3 και Δ4 θα οδηγήσουν στη συρρίκνωση των υψηλών βαθμολογιών.