ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα και Απαντήσεις

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

ΓΥΜΝΑΣΙΟ / ΛΥΚΕΙΟ ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

www.othisi.gr

Τετάρτη, 18 Μαΐου 2016
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 247-248

Α4. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1, Β2, Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ $D_f=R$.

Β1. $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}\cdot x$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \overset{\frac{2}{(x^2+1)^2}>0}{\Leftrightarrow} x>0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f′ και μεταβολών της f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	↘	$f(0)=0$ Ε	↗

Η f συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f'(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)>0$, $x\in(0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

B2. $f''(x)=\left(\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\left(\dfrac{2(x^2+1)^2-2(x^2+1)\cdot 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^4}\right)=\dfrac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4}=$

$$=\frac{2}{(x^2+1)^3}\cdot(1-(\sqrt{3}x)^2)=\frac{2}{(x^2+1)^3}(1-\sqrt{3}x)\cdot(1+\sqrt{3}x)$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	0	−	
f			Σ.Κ		Σ.Κ		

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\overset{f\ \text{άρτια}}{=}\frac{1}{4}$ άρα σημεία καμπής $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$

Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $f''(x)<0$, $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $f''(x)>0$, $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, άρα η f κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ και $f''(x)<0$, $x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

B3. Επειδή η f συνεχής στο $D_f=(-\infty,+\infty)$ δεν αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για ασύμπτωτες στο $-\infty$ και το $+\infty$ έχουμε:

«πλάγιες–οριζόντιες» στο $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, άρα $\lambda=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$, άρα β=1

Και τελικά η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

«πλάγιες–οριζόντιες» στο –∞:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, άρα λ=0

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$, άρα β=1

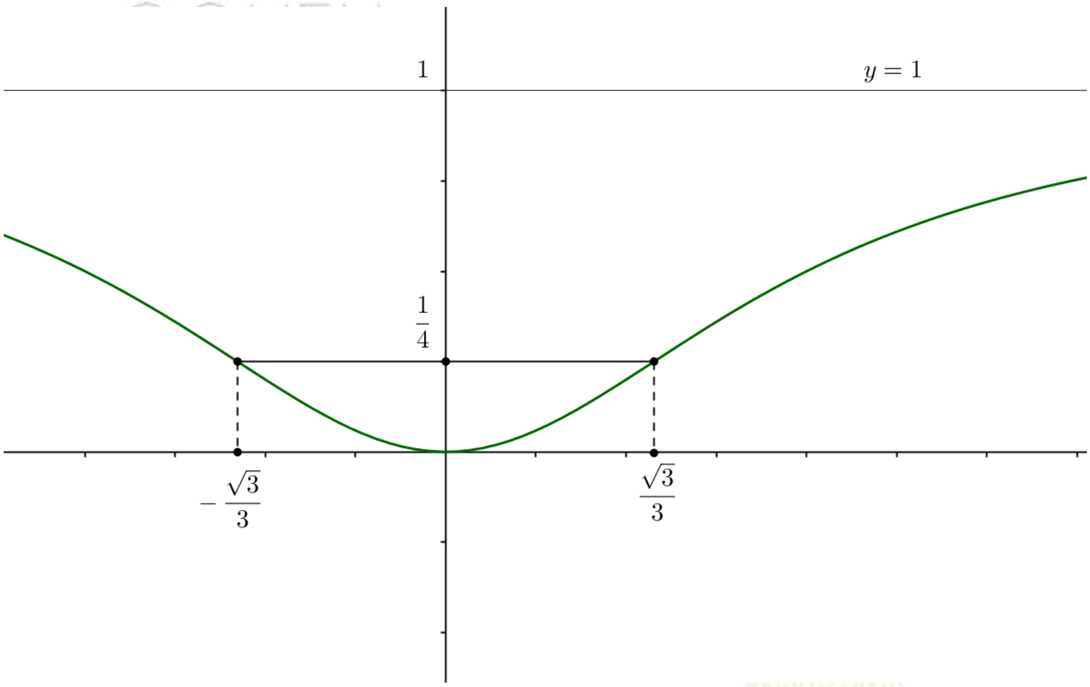
Και τελικά η ίδια ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στης C_f στο –∞.

Β4. Παρατηρώ ότι f(–x)= $\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$, x∈R άρα η f άρτια.

Επίσης f(0)=0 οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο 0(0,0).

Πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	o	+		+		−	
$f'(x)$		−		−	o	+	o	+	



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in R$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f: R→R που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$ για κάθε $x\in R$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:
$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι $e^{x^2}-x^2-1=0$

<u>Α΄ τρόπος</u>

$e^{x^2}-x^2-1=0$ (1)

Προφανής ρίζα η x=0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$.

Η h παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	−		+
h	↘		↗

Η h(x) έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=0$ οπότε $h(x)\geq h(0)=0$.

Άρα η h(x)=0 μόνο για x=0.

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε $h(x)=e^x-x-1$, $x\in R$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$h'(x)=e^x-1$

Η $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e^x\ \text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x>0$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<e^0 \overset{e^x\ \text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x<0$

συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
h	↘		↗

Η $h(x)$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$ το $h(0)=0$ οπότε $h(x)\geq h(0)=0$.

Άρα η $h(x^2)=0$ μόνο για $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ αφού για $x\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 0$ άρα $h(x^2)>0$.

<u>Γ′ τρόπος</u>

Από τη βασική ανισότητα $\ln x\leq x-1$, $x>0$ θέτοντας όπου $x\to e^{x^2}$, $x\in R$ γίνεται:

$\ln e^{x^2} \leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2\leq e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ με το «=» να ισχύει μόνο για την τιμή $x^2=0$ $\Leftrightarrow x=0$.

<u>Δ′ τρόπος</u>

Θεωρούμε $h(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2+1}$, $x\in R$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγίσιμων με $h'(x)=\dfrac{e^{x^2}2x(x^2+1)-e^{x^2}(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^{x^2}2x(x^2+1-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^{x^2}2x^3}{(x^2+1)^2}$

Έχουμε $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$h'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

οπότε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
h	↘		↗

Ο.Ε το $h(0)$

άρα $h(x)\geq 1$ για κάθε $x\in R$

Για $x>0 \overset{h\text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} h(x)>1 \Leftrightarrow e^{x^2}>x^2+1$

Για $x<0 \overset{h\text{ γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} h(x)>1 \Leftrightarrow e^{x^2}>x^2+1$

Άρα η $x=0$ είναι μοναδική λύση της $e^{x^2}=x^2+1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για την εφαπτομένη της C_h στο $x_o=0$ είναι $y-h(0)=h'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=0 \Leftrightarrow y=0$ άρα $h(x)\geq 0$ οπότε $e^x-x-1\geq 0$ για $x\in R$.

Άρα όπου x το x^2 είναι $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ δηλαδή η $x=0$ μοναδική ρίζα της (1).

Γ2. $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1| \overset{\text{απο (Γ1) Α τρόπος}}{\Leftrightarrow} |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$

Επειδή $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ από Γ1 τότε η $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ μοναδική ρίζα. Άρα η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty, 0)$ και $\Delta_2=(0, +\infty)$ τότε αν:

- $f(x)>0$ στα $Δ_1$ και $Δ_2$ είναι $f(x)= e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$.
- $f(x)<0$ στα $Δ_1$ και $Δ_2$ είναι $-f(x)= e^{x^2}-x^2-1 \Rightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in R$.
- $f(x)>0$ στο $Δ_1$ και $f(x)<0$ στο $Δ_2$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

- $f(x)<0$ στο $Δ_1$ και $f(x)>0$ στο $Δ_2$ είναι:

$$f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$$

Γ3. <u>Α΄ τρόπος</u>:

Είναι $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$ (παραγωγίσιμη ως πράξη σύνθεση μεταξύ παραγωγισίμων) και

$f''(x)=2(e^{x^2}-1)+2x\cdot 2xe^{x^2} \Leftrightarrow f''(x)=2e^{x^2}-2+4x^2e^{x^2}$ (παραγωγίσιμη ως πράξη σύνθεση μεταξύ παραγωγισίμων) και

$f'''(x)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=4xe^{x^2}(2x^2+3)$

Άρα ο πίνακας μεταβολών για την f'' είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
f''	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Η f'' έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, άρα $f''(x)\geq f''(0)=0$, άρα η $f''(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ και για $x\neq 0$ $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή, για κάθε $x\in R$.

<u>Β΄ τρόπος</u>:

$f'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1)$

$0<x_1<x_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} x_1^2<x_2^2 \Rightarrow e^{x_1^2}<e^{x_2^2} \Leftrightarrow e^{x_1^2}-1<e^{x_2^2}-1$ (2)

Για $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2$ (3)

Οι (2),(3) είναι ανισότητες ίδιας φοράς με όλα τους τα μέλη θετικά, άρα

$2x_1\left(e^{x_1^2}-1\right)<2x_2\left(e^{x_2^2}-1\right) \Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για $x_1<x_2<0$ είναι $-x_1>-x_2>0$ οπότε $f'(-x_1)>f'(-x_2)$ (4)

Η $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$ είναι περιττή καθώς για κάθε $x\in D_f$ και $-x\in D_f$ και, άρα $f'(-x)=-2x(e^{x^2}-1)=-f'(x)$, άρα η (4) $-f'(x_1)>-f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in(-\infty,0)$.

Επειδή η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ (πράξη σύνθεση συνεχών) η f' είναι τελικά γνησίως αύξουσα στο R, άρα η f είναι κυρτή.

Γ′ τρόπος:

Είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$f'(x)=e^{x^2}2x-2x$

$f''(x)=e^{x^2}2x\cdot 2x+e^{x^2}\cdot 2-2 \Leftrightarrow f''(x)=e^{x^2}(4x^2+2)-2$

Είναι $e^{x^2}\geq x^2+1$ από Γ1

και $x^2+1\geq \dfrac{2}{4x^2+2}\Leftrightarrow x^2+1\geq \dfrac{1}{2x^2+1}$, διότι

$(x^2+1)(2x^2+1)\geq 1\Leftrightarrow 2x^4+2x^2+x^2+1\geq 1\Leftrightarrow 2x^4+3x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2(2x^2+3)\geq 0$, που είναι αληθές για κάθε $x\in R$

Άρα $e^{x^2}\geq x^2+1\geq \dfrac{2}{4x^2+2}$, οπότε $e^{x^2}(4x^2+2)\geq 2\Leftrightarrow f''(x)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$

Άρα η $f''(x)>0$ στο R^* και στο $x_0=0$ είναι η f συνεχής, οπότε η f κυρτή στο R.

Γ4. Έχουμε:

$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ (1), $x\geq 0$

Θεωρούμε $g(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, ως πράξεις συνεχών.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$g'(x)=f'(x+3)(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

Για $x\geq 0$, $x<x+3\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow g'(x)>0$, οπότε g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Άρα η g είναι «1–1».

$(1)\Leftrightarrow g(|\eta\mu x|)=g(x)\overset{g\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=x\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$, από θεωρία σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(R)=R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx+συνx}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))ημxdx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)ημxdx+\int_0^\pi (f'(x))'\,ημxdx=\pi\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)ημxdx+[f'(x)ημx]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=\pi\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)ημxdx+f'(\pi)ημ\pi-f'(0)ημ0-[f(x)συνx]_0^\pi+\int_0^\pi f(x)(συνx)'dx=\pi\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)ημxdx-f(\pi)συν\pi+f(0)ημ0-\int_0^\pi f(x)ημxdx=\pi\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ (1)

- Κοντά στο 0 θεωρώ $g(x)=\dfrac{f(x)}{ημx}$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$, $f(x)=g(x)ημx$, άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(g(x)ημx)=1\cdot0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο R (ως παραγωγίσιμη), άρα και στο 0, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$, άρα η (1) $f(\pi)+0=\pi\Leftrightarrow f(\pi)=\pi$.
- f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με
$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)ημx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\dfrac{ημx}{x}\right)=1\cdot1=1$,

<u>Β΄ τρόπος</u>(για το $f(\pi)+f(0)=\pi$)

$\int_0^\pi f(x)ημxdx+\int_0^\pi f''(x)ημxdx=\pi$

$\Leftrightarrow-\int_0^\pi f(x)(συνx)'dx+\int_0^\pi (f'(x))'\,ημxdx=\pi$

$\Leftrightarrow-[f(x)συνx]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)συνxdx+[f'(x)ημx]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=\pi$.

$\Leftrightarrow -f(\pi)\cdot συν\pi+f(0)\cdot συν0+f'(\pi)\cdot ημ\pi-f'(0)\cdot ημ0=\pi$
$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$

Β′ τρόπος(για το f′(0)=1)

Κοντά στο 0

$$h(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}$$

με $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ (αφου f παρ/μη στο 0)

και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

άρα $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=f'(0)$ όμως $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$ άρα $f'(0)=1$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε $x_0\in R$. Τότε το x_0 εσωτερικό του D_f, f παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα από Θ. Fermat $f'(x_0)=0$.

Έχουμε $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$, $x\in R$, άρα $e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$

Για $x=x_0$ $e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow 1=e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=0$ άρα $f'(0)=0$ άτοπο αφού $f'(0)=1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο R.

β) Αφού f′ συνεχής στο R (γιατί η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R) και $f'(x)\neq 0$, $x\in R$ (από α) η f′ διατηρεί πρόσημο στο R. Όμως $f'(0)=1>0$, άρα $f'(x)>0$, $x\in R$, επομένως η f γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Αφού η f είναι συνεχής στο R και γνησίως αύξουσα στο R, με $f((-\infty,+\infty))=(A,B)$, όπου $A=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, όμως $f((-\infty,+\infty))=R$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Έχουμε στο $+\infty$

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|+\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}+\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\frac{1}{|f(x)|}+\frac{1}{|f(x)|}=\frac{2}{|f(x)|}$$

Άρα $-\frac{2}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{|f(x)|}$

Και $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{2}{|f(x)|})=0$ (αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{|f(x)|}=0$ άρα από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. 1ος τρόπος:

Για

$1\leq x\leq e^{\pi}\overset{\ln x\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}\ln 1\leq\ln x\leq\ln e^{\pi}\Leftrightarrow 0\leq\ln x\leq\pi\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}f(0)\leq f(\ln x)\leq f(\pi)$

$\Leftrightarrow 0\leq f(\ln x)\leq\pi\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\leq\frac{f(\ln x)}{x}\leq\frac{\pi}{x}$

- Έχουμε $\frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$, x∈[1, e^{π}] και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1, άρα $\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$

- Έχουμε $\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$, x∈[1, e^{π}] και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=e^{π},

  άρα $\int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{\pi}{x} - \frac{f(\ln x)}{x}\right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \Leftrightarrow [\pi \ln x]_1^{e^{\pi}} - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$

  $\Leftrightarrow \pi \ln e^{\pi} - \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$, άρα $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>:

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx \overset{\substack{u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_0^{\pi} f(u) du$$

x	u
1	0
e^{π}	π

Για $0 \leq u \leq \pi \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$

- Έχουμε f(u)≥0 στο [0,π] και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 0. Άρα $\int_0^{\pi} f(u) du > 0$.
- Έχουμε π−f(u)≥0 στο [0,π] και συνεχής με την ισότητα να ισχύει μόνο στο π. Άρα $\int_0^{\pi} (\pi - f(u)) du > 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \pi du - \int_0^{\pi} f(u) du > 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(u) du < \pi^2$.

  Άρα $0 < \int_0^{\pi} f(u) du < \pi^2$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Στα σημερινά θέματα παρατηρούμε μια αλλαγή νοοτροπίας σε σχέση με τα θέματα των προηγουμένων ετών. Ο χαρακτήρας των θεμάτων είναι περισσότερο υπολογιστικός παρά θεωρητικός και σχετίζεται με αντίστοιχα θέματα του σχολικού βιβλίου. Η διαβάθμιση δυσκολίας των ερωτημάτων σε κάθε θέμα κρίνεται ικανοποιητική. Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν στα διάφορα ερωτήματα, σε μικρότερη κλίμακα βέβαια, συγκριτικά με τα προηγούμενα χρόνια, εκείνα τα ποιοτικά στοιχεία που θα διαμορφώσουν τις υψηλές βαθμολογίες.