Δευτέρα, 18 Μαΐου 2009
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 10

Β. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν ($\kappa \leq \nu$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g(x)$$

Μονάδες 2

β) Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

Μονάδες 2

γ) Για τη συνάρτηση f(x)=ημx ισχύει ότι

$$(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$$

Μονάδες 2

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 2

ε) Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.150.

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.65.

Γ. α Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i, i=1,2,3,4 μιας μεταβλητής X με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, i=1,2,3,4. Η συχνότητα ν_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2=3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x}=4$.

x_i	ν_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $\nu_2=7$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

Μονάδες 9

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{4,9}\approx 2,2$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}\Leftrightarrow$

$4=\dfrac{2\cdot 6+3\cdot \nu_2+5\cdot 3+8\cdot 4}{13+\nu_2}\Leftrightarrow$

$52+4\nu_2=59+3\nu_2\Leftrightarrow$

$\nu_2=7$

β.

x_i	ν_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\,\nu_i$
2	6	–2	4	24
3	7	–1	1	7
5	3	1	1	3
8	4	4	16	64
	20	-	-	98

$s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\nu_i}{\nu}=\dfrac{98}{20}=4,9$

γ. $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{\sqrt{4,9}}{4}\approx\dfrac{2,2}{4}=0,55$ ή 55%>10% άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2,\ x\in R$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha=9$.

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7,\ \alpha\in R$

$f'(x)=3x^2-12x+\alpha$

$f''(x)=6x-12$

ισχύει για κάθε $x\in R$ $2f''(x)+f'(x)+15=3x^2 \Leftrightarrow$

$2(6x-12)+3x^2-12x+\alpha+15=3x^2\Leftrightarrow$

$12x-24+3x^2-12x+\alpha+15=3x^2\Leftrightarrow$

$\alpha=9$

β. Έχουμε $\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-12x+9}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-4x+3)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(-2)}{2}=-3$

γ. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

Έστω (ε): $y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη εφαπτομένη. Εφόσον είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x$, ισχύει ότι $\lambda=-3$.

Αν $A(x_1, f(x_1))$ είναι το σημείο επαφής τότε:

$f'(x_1)=-3 \Leftrightarrow 3x_1^2-12x_1+9=-3\Leftrightarrow 3(x_1^2-4x_1+3)=-3 \Leftrightarrow x_1^2-4x_1+3=-1 \Leftrightarrow x_1^2-4x_1+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1-2)^2=0 \Leftrightarrow x_1=2$.

Άρα το $A(2, f(2))=A(2, -5)$ ανήκει στην (ε), δηλαδή $-5=-3\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=1$.

Τελικά (ε): $y=-3x+1$

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Αν $A(x_1, f(x_1))$ είναι το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση

(ε): $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

Όμως (ε)// $y=-3x$ άρα $f'(x_1)=-3 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=2$.

Οπότε (ε): $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-(-5)=-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+1$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2, x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. **α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8),f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R=3+\ln\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,…,100} ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A=\{\lambda\in\Omega \mid R+\delta<-2\}$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. α. $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2, x>0$

Έχουμε ότι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x}=0 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x}>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-x>0 \Leftrightarrow -x>-2 \Leftrightarrow x<2$

Άρα στο διάστημα (0,2] η f είναι γνήσια αύξουσα

Ακόμη $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x}<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2-x<0 \Leftrightarrow -x<-2 \Leftrightarrow x>2$

Άρα στο διάστημα [2,+∞) η f είναι γνήσια φθίνουσα.

β. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	0		2		+∞
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	f(2) max	↘	

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0=2$

Το $f(2)=\ln 2-\frac{2}{2}+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1$

Β. **α.** Επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[2,+\infty)$ οι παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά είναι f(8), f(5), f(4), f(3), f(2)

Οπότε η μέγιστη τιμή είναι το f(2) και ελάχιστη τιμή το f(8) άρα εύρος

$R=f(2)-f(8)=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1-(\ln 8-\frac{8}{2}+\lambda^2-6\lambda+2)=3+\ln 2-\ln 8=3+\ln\frac{2}{8}=3+\ln\frac{1}{4}$

Και η διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση

άρα η τρίτη οπότε $\delta=f(4)=\ln 4-\frac{4}{2}+\lambda^2-6\lambda+2=$

$=\ln 4-2+\lambda^2-6\lambda+2=$

$=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$

β. Βρίσκουμε το λ ώστε $R+\delta<-2\Leftrightarrow$

$3+\ln\frac{1}{4}+\ln 4+\lambda^2-6\lambda<-2\Leftrightarrow$

$3+\ln 1-\ln 4+\ln 4+\lambda^2-6\lambda+2<0\Leftrightarrow$

$\lambda^2-6\lambda+5<0$ (1)

επειδή οι ρίζες της $\lambda^2-6\lambda+5$ είναι 1 και 5 η (1) ισχύει για $1<\lambda<5$

άρα A={2, 3, 4} επομένως σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό

$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}=0{,}03$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται για την ευκολία των ζητουμένων αφού απαιτούσαν απλώς την κατανόηση της διδαχθείσας ύλης.