Πέμπτη, 22 Μαΐου 2008
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)'=0$.

Μονάδες 8

Β. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x}>0$ και πώς, αν $\bar{x}<0$;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ο τύπος

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 2

β) Η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $t_1, t_2,\ldots,t_\nu$ είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

Μονάδες 2

γ) Αν $x>0$, τότε $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 2

δ) Αν x_o είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x\to x_o} \etaμx = \etaμx_o.$$

Μονάδες 2

ε) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 28

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 96

Γ. α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x)=2-x$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f(x).

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Είναι $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, $x\in R$ οπότε για $x\neq 1$ έχουμε:

$$\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\frac{e^x\frac{x-1}{e^x}}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1},$$ επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

β) $$f'(x)=\left(\frac{x-1}{e^x}\right)'=\frac{(x-1)'e^x-(x-1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x+1}{e^x}=\frac{2-x}{e^x},\ x\in R$$

Άρα $e^x f'(x)=e^x\frac{2-x}{e^x}=2-x$

γ) $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$, $x\in R$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$

Άρα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(2)=\frac{1}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Α	Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α) Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

Μονάδες 5

β) Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιόν τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3{,}3$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την μπαταρία Α έχουμε:

$$\bar{x}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{18+20+22+24+26}{5} = \frac{40+50+20}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλ. ώρες}$$

Για την μπαταρία Β έχουμε:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{19+20+23+26+32}{5} = \frac{46+55+19}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλ. ώρες}$$

β) Για την μπαταρία Α αφού $\bar{x}_A = 22$ χιλ. ώρες και κοστίζει 38 ευρώ, τότε στοιχίζει $\frac{38}{22} = 1{,}72$ ευρώ ανά χίλιες ώρες λειτουργίας.

Για την μπαταρία Β αφού $\bar{x}_B = 24$ χιλ. ώρες και κοστίζει 40 ευρώ, τότε στοιχίζει $\frac{40}{24} = 1{,}66$ ευρώ ανά χίλιες ώρες λειτουργίας.

Άρα προτιμητέος τύπος μπαταρίας, ο τύπος Β.

γ) Για την μπαταρία Α έχουμε:

t_i	$t_i-\bar{x}_A$	$(t_i-\bar{x}_A)^2$
18	–4	16
20	–2	4
22	0	0
24	2	4
26	4	16
ΣΥΝΟΛΟ	–	40

Είναι $s_A{}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x}_A)^2 = \frac{40}{5} = 8$

Για την μπαταρία Β έχουμε:

t_i	$t_i-\bar{x}_B$	$(t_i-\bar{x}_B)^2$
19	–5	25
20	–4	16
23	–1	1
26	2	4
32	8	64
ΣΥΝΟΛΟ	–	110

Είναι $s_B{}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(t_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{110}{5} = 22$

Είναι $s_A = \sqrt{s_A{}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$s_B = \sqrt{s_B{}^2} = \sqrt{22}$

δ) $CV_A = \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11} = \sqrt{2}\frac{1}{11}$

$CV_B = \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24} \cong \sqrt{2}\frac{3,3}{24} = \sqrt{2}\frac{1,1}{8}$

Είναι:

$$\frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{\sqrt{2}\sqrt{11}}{24}} = \frac{24}{11\sqrt{11}} = \frac{24}{36,3} < 1$$

$CV_A<CV_B$, το δείγμα Α είναι πιο ομοιογενές από το Β.

ΘΕΜΑ 4ο

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο
Β: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».
Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \le P(B) \le \frac{7}{10}.$$

Μονάδες 9

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

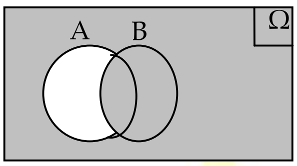
$$f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και Β το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Π.Τ. : « επιλέγω τυχαία έναν κάτοικο»
Έστω τα ενδεχόμενα:
Α: «Ο κάτοικος της πόλης να διαβάζει την εφημερίδα α»
Β: «Ο κάτοικος της πόλης να διαβάζει την εφημερίδα β»
Σύμφωνα με την υπόθεση $P(A)=0{,}5$ και επειδή το ενδεχόμενο να διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β είναι $A-B$ σύμφωνα με την υπόθεση $P(A-B)=0{,}3$ και σύμφωνα με γνωστό νόμο θα έχουμε
$P(A)-P(A\cap B)=0{,}3 \Leftrightarrow 0{,}5-P(A\cap B)=0{,}3 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$



Το ενδεχόμενο ο κάτοικος της πόλης να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β είναι $A'\cup B$ και σύμφωνα με το διάγραμμα $(A-B)'=A'\cup B$ οπότε
$P(A'\cup B)=P[(A-B)']=1-P(A-B)=1-0{,}3=0{,}7$
ή διαφορετικά
$P(A'\cup B)= P(A') + P(B) - P(A'\cap B) =0{,}5 + P(B) - P(B) + P(B\cap A)=0{,}7$

β) Επειδή ισχύει $B\subseteq(A-B)'$ από διάγραμμα θα ισχύει σύμφωνα με γνωστό νόμο
$P(B)\le P(A-B)'$ ή $P(B)\le 0{,}7$ ή $P(B)\le \frac{7}{10}$

Επειδή $A \cap B \subseteq B$ ισχύει $P(A \cap B) \leq P(B)$ άρα $0{,}2 \leq P(B)$ δηλαδή $\frac{1}{5} \leq P(B)$

Άρα τελικά $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

γ) Παραγωγίζοντας την f έχουμε

$f'(x)=3x^2-x+P(B)$

επειδή $\Delta=1-12P(B)$ και από (β)

$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$ πολλαπλασιάζοντας με -12

ισχύει $-\frac{12}{5} \geq -12P(B) \geq -\frac{84}{10}$

$1-\frac{12}{5} \geq 1-12P(B) \geq 1-\frac{42}{5}$ άρα

$-\frac{7}{5} \geq \Delta \geq -\frac{37}{5}$ οπότε $\Delta<0$

άρα $f'(x) \neq 0$ επομένως η f δεν έχει ακρότατα στο R.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Α) Στις σημερινές εξετάσεις υπήρχαν ερωτήματα που για την αντιμετώπισή τους χρειαζόταν αρκετή κριτική ικανότητα και αυτενέργεια. Τα περισσότερα ερωτήματα χρειαζόταν από τους υποψηφίους να έχουν κατανοήσει πλήρως την ύλη, προκειμένου να δοθούν ακριβείς απαντήσεις. Κρίνουμε βάση των παραπάνω ότι θα υπάρξει ποσοστιαία μείωση στις υψηλές βαθμολογίες.

Β) Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.