ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2010

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Δευτέρα, 17 Μαΐου 2010
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουνε μέση τιμή $\bar{x}$.
Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\bar{x}$, $t_2-\bar{x}$,…, $t_\nu-\bar{x}$.
Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Αν x_1, $x_{2,\dots,}$ x_ν είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και w_1, $w_{2,\dots,}$ w_ν είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε το σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α3. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχόμενου και του αδύνατου ενδεχόμενου.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))$.

β) Για κάθε x>0 ισχύει $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x=f(t), τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\upsilon(t_0)=f'(t_0)$

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

ε) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 93

Ο αριθμητικός μέσος των διαφορών είναι:

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+..+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu}.$$

Όμως $\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+..+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{t_1+t_2+..+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0.$

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 86-87

Εάν σε κάθε τιμή $x_1,x_2,..,x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας $w_1,w_2,..,w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+..+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+...+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}w_ix_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}.$$

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 140

Ο ίδιος ο δ.χ. Ω ενός πειράματος τύχης θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Δεχόμαστε ως ενδεχόμενο το κενό σύνολο $\varnothing$ που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος τύχης.

Γι'αυτό λέμε ότι το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.

Α4. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1,\ x\in R.$

Β1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$

Μονάδες 10

Β3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα x'x

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(\sqrt{x^2-x+1}^{\,2}-1^2)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)x}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\dfrac{2\cdot 1}{2}=1$

Β2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι $\lambda_\varepsilon=f'(0)$.

Έχουμε $f'(x)=2\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}(x^2-x+1)'=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Άρα $f'(0)=\dfrac{-1}{1}\Leftrightarrow$

$f'(0)=-1$

Β3. Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον x'x, τότε ισχύει ότι:

$\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega\overset{B2}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 160 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0 - ...)	...	20
[... - ...)	6	40
[... - ...)	...	45
[... - ...)	...	30
[... - ...)	...	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c κάθε κλάσης είναι ίσο με 4

Μονάδες 6

Γ2. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα σωστά συμπληρωμένο, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 8

Γ3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Γ4. Αν κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Α: « η απώλεια βάρους ενός ατόμου που επιλέχθηκε τυχαία να είναι από 7 μέχρι και 14 κιλά».

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος $s^2 = \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i\right)^2}{v}\right]$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Αν x_1 , x_2 οι κεντρικές τιμές των 2 κλάσεων τότε $x_2 - x_1 = c$. Ισχύει $0+c+\frac{c}{2}=6 \Leftrightarrow \frac{3c}{2}=6 \Leftrightarrow c=4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	x_i	ν_i	x_i	N_i
[0 – 4)	2	20	40	20
[4 -8)	6	40	240	60
[8 – 12)	10	45	450	105
[12 – 16)	14	30	420	135
[16 - 20)	18	25	450	160
ΣΥΝΟΛΟ	-	160	1600	-

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10$$

$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 v_i$, οπότε

$$s^2 = \frac{1}{160}\left[(2-10)^2 20 + (6-10)^2 40 + (10-10)^2 45 + (14-10)^2 30 + (18-10)^2 25\right]$$

$\Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{160}\left[1280 + 640 + 480 + 1600\right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{4000}{160} = 25$. Άρα s=5.

Διαφορετική αντιμετώπιση υπολογισμού της απόκλισης με τον τύπο που δίνεται μας οδηγεί στον παρακάτω πίνακα

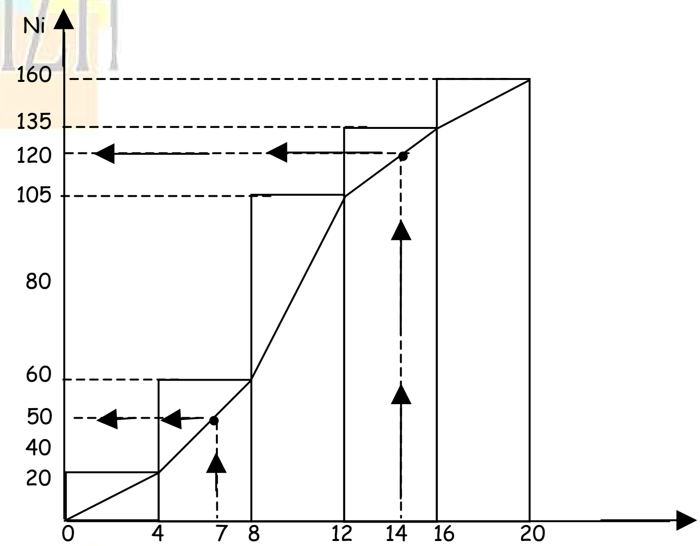
$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
40	80
240	1440
450	4500
420	5880
450	8100
1600	20000

$\bar{x} = \dfrac{1600}{160} = 10$

$s^2 = \dfrac{1}{160}20000 - 10^2 = 125 - 100 = 25$. Αρα s=5.

Γ3. $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \dfrac{5}{10} = 0{,}5 > 0{,}1$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων



Από το πολύγωνο βλέπουμε ότι 'κάτω' από 7 κιλά είναι 50 άτομα, ''κάτω'' από 14 κιλά είναι 120 άτομα, οπότε μεταξύ 7 και 14 κιλά, αντιστοιχούν 120 – 50=70 άτομα, άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{70}{160} = \dfrac{7}{16}$

<u>Παρατήρηση:</u>

Εκτιμούμε ότι η εύρεση της πιθανότητας με αναλογìες στις κλάσεις θα είναι αποδεκτή

ΘΕΜΑ Δ

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B)$, $x>P(A)$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A)=\frac{2}{3} \text{ και } P(B)=\frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Δ3. Να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β.

Μονάδες 5

Δ4. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B)$, $x>P(A)$

Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}(x-P(A))'-\frac{1}{2}2(x-P(A))(x-P(A))'+0=\frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))=0 \Leftrightarrow 1-(x-P(A))^2=0 \Leftrightarrow 1=(x-P(A))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(x-P(A)|=1$ και επειδή $x>P(A) \Leftrightarrow x-P(A)>0$ έχουμε $x-P(A)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1+P(A)$

Επίσης $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))>0 \overset{x-P(A)>0}{\Leftrightarrow} 1-(x-P(A))^2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1>(x-P(A))^2 \Leftrightarrow |(x-P(A)|<1$

και επειδή $x-P(A)>0$ έχουμε ισοδύναμα $x-P(A)<1 \Leftrightarrow x<1+P(A)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f′ και μεταβολών της f

x	$P(A)$		$1+P(A)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1+P(A))$	$\searrow$	

οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(P(A),\, 1+P(A)]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[1+P(A),\, +\infty)$ άρα στο $x_0=1+P(A)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$$f(1+P(A))=\ln(1+P(A)-P(A))-\frac{1}{2}(1+P(A)-P(A))^2+P(B)=\ln 1-\frac{1}{2}+P(B)=P(B)-\frac{1}{2}$$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_0)=0$ σύμφωνα με το $Δ_1$ θα ισχύει $1+P(A)=\frac{5}{3}$ και $P(B)-\frac{1}{2}=0$

Οπότε $P(A)=\frac{5}{3}-1$ και $P(B)-\frac{1}{2}=0$ οπότε $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$

Δ3. Να μη πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι $(A\cap B)'$ άρα η πιθανότητα $P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$ (1)

Επειδή $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ έχουμε ότι $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{6}$ και σύμφωνα με το $Δ_2$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)=\frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{6}-\frac{5}{6}=P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Επομένως από (1) $P(A\cap B)'=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Δ4. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι το γεγονός $(A-B)\cup(B-A)$ και επειδή $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$ έχουμε

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Α.Τα σημερινά θέματα καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης με ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους, το συνδυασμό των γνώσεων απ'όλα τα κεφάλαια. Απαιτούσαν συνθετική και κριτική ικανότητα για την αντιμετώπιση αρκετών ερωτημάτων. Οι υποψήφιοι έπρεπε να έχουν κατανοήσει σε αρκετό βάθος τις έννοιες της ύλης τους καθώς και να έχουν ευχέρεια στις αλγεβρικές πράξεις.

Β. Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.