

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017



Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της
Ωθησης

Σάββατο, 14 Μαΐου 2011
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
 $P(A-B)=P(A) - P(A \cap B)$

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

A3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6 \bar{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 152.
 A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142.
 A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 147 (δηλαδή το ποσοστό εμφάνισης της τιμής x_i στο δείγμα).
 A4. $\alpha - \Lambda$, $\beta - \Lambda$, $\gamma - \Sigma$ (σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο), $\delta - \Lambda$, $\varepsilon - \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη

είναι $P(A) = 24\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν

για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$

Μονάδες 6

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. Είναι $P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$ άρα $4N(M) = N(\Omega)$ και από $64 < N(\Omega) < 72$ έπεται πως $64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18$ και ο μοναδικός ακέραιος μεταξύ του 16 και 18 είναι το 17, άρα $N(M) = 17$. Επομένως $N(\Omega) = 17 \cdot 4 = 68$.

B2. Για τις πιθανότητες $P(M) = \frac{1}{4}$, $P(A) = 4\lambda^2$ και να $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, ισχύει ότι

$P(M) + P(A) + P(K) = 1$ (1) και επιπλέον $0 \leq P(M) \leq 1$, $0 \leq P(A) \leq 1$ (2) και $0 \leq P(K) \leq 1$ (3)

η (1) γίνεται: $\frac{1}{4} + 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{8}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \text{ και } \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Από (2) $\Rightarrow 0 \leq 4\lambda^2 \leq 1$ και $\Rightarrow 0 \leq 4\lambda^2$ ισχύει πάντα άρα $4\lambda^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2\lambda \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$. Δηλαδή δεκτή η $\lambda = \frac{1}{4}$.

Τότε η (3) για $\lambda = \frac{1}{4}$ γίνεται $0 \leq -5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{4} \leq 1$ αληθής. Άρα $\lambda = \frac{1}{4}$.

B3. Για $\lambda = \frac{1}{4}$ οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι: $P(M) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(K) = \frac{1}{2}$ και για

$N(\Omega) = 68$, είναι:

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(M) = 68 \cdot \frac{1}{4} = 17 \text{ σφαίρες}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A) = 68 \cdot \frac{1}{4} = 17 \text{ σφαίρες}$$

$$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(K) = 68 \cdot \frac{1}{2} = 34 \text{ σφαίρες}$$

B4. Επειδή $A \cap M = \emptyset$ έπεται πως $N(A \cup M) = N(A) + N(M) = 34$

$$\text{Άρα } P(A \cup M) = \frac{N(A \cup M)}{N(\Omega)} = \frac{34}{68} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

$$\begin{array}{cccc} A(8, 0) & B(10, 10) & \Gamma(12, 20) & \Delta(14, y_{\Delta}) \\ & E(16, y_E) & Z(18, 10) & H(20, 0) \end{array}$$

όπου y_{Δ} , y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_{Δ} και y_E των κορυφών Δ και E , αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Οι κεντρικές τιμές των κλάσεων είναι οι τετμημένες των Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Δηλαδή $x_1=10, x_2=12, x_3=14, x_4=16, x_5=18$. Οι τεταγμένες των Β, Γ, Δ, Ε, Ζ είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες % των κλάσεων. Άρα $f_1\%=10, f_2\%=20, f_3\%=y_\Delta, f_4\%=y_E, f_5\%=10$.

$$\text{Ισχύει ότι } \sum_{i=1}^5 f_i\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + y_\Delta + y_E + 10 = 100 \Leftrightarrow y_\Delta + y_E = 60 \quad (1)$$

α' τρόπος:

Επειδή ΔΕ παράλληλο στον οριζόντιο άξονα $y_\Delta = y_E \quad (2)$

Από (1), (2) $y_\Delta = y_E = 30$

β' τρόπος:+

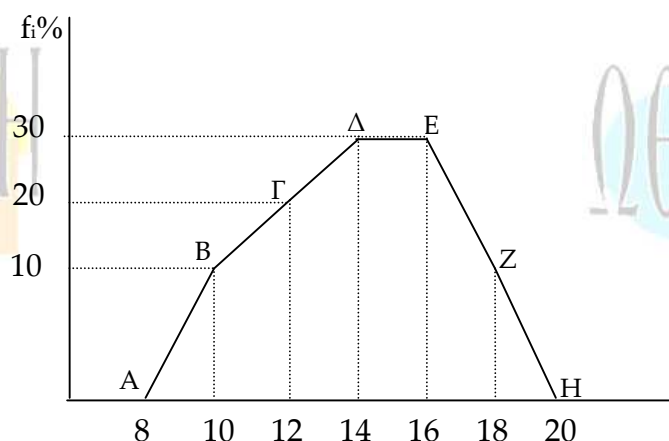
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^5 x_i f_i = \frac{10 \cdot 10 + 12 \cdot 20 + 14 \cdot y_\Delta + 16 \cdot y_E + 18 \cdot 10}{100} = \frac{100 + 240 + 14y_\Delta + 16y_E + 180}{100} = \\ &= \frac{520 + 14y_\Delta + 16y_E}{100} \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \bar{x} = 14,2 \Leftrightarrow \frac{520 + 14y_\Delta + 16y_E}{100} = 14,2 \Leftrightarrow 14y_\Delta + 16y_E = 900 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 14y_\Delta + 16(60 - y_\Delta) = 900 \Leftrightarrow 14y_\Delta + 960 - 16y_\Delta = 900 \Leftrightarrow 2y_\Delta = 60 \Leftrightarrow y_\Delta = 30$$

Από (1) $y_E = 30$

Γ2.



Γ3. Αν c είναι το πλάτος κάθε κλάσης, αφού $x_{\Gamma} - x_B = x_{\Delta} - x_{\Gamma} = x_E - x_{\Delta} = x_Z - x_E = 2$, συμπεραίνουμε ότι $c = 2$. Εφόσον $x_B = 10$ και $c = 2$ οι κλάσεις είναι [9-11), [11-13), [13,15), [15-17), [17,19)

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	$f_i\%$
9 – 11	10	10
11 – 13	12	20
13 – 15	14	30
15 – 17	16	30
17-19	18	10
Σύνολο	-	100

Γ4. Πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ έχουν κάνει οι πωλητές της 4ης και της 5ης κλάσης, $f_4 + f_5 = 30 + 10 = 40\%$

Γ5. Από εμβαδόν ισχύει ότι $V = 80$. Από (Γ4), έχουμε $80 \frac{40}{100} = 32$ πωλητές διακαιούνται το ποσόν.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1, i=1,2,3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $f(x) = e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})}$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι: $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} (\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x)' = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} (x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15})$.

Οπότε $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ ή $x_2 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ ή $x > \frac{2}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f					

Η f είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{5}, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$.

Δ2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Αφού είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f, τότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

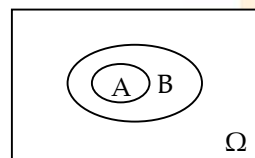
$A \subseteq B$ άρα $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$

Άρα $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$



Δ3. α) Είναι $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})} = e^{\frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow 5x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}) - 3x(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

β) Είναι $x_1 < x_2 < x_3$, άρα $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

x_i	v_i	$x_i v_i$
0	1	0
2	5	10
3	7	21
Σύνολο	13	31

Είναι $v_i = 2x_i + 1$, $i = 1, 2, 3$.

$v_1 = 2x_1 + 1 = 1$

$v_2 = 2x_2 + 1 = 5$

$v_3 = 2x_3 + 1 = 7$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{31}{13}$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα μπορούν να κριθούν ως ιδιαίτερος απαιτητικά συγκρινόμενα με τα θέματα των προηγούμενων ετών.

Παρατηρούμε σημεία που θα προβληματίσουν τους εξεταζόμενους και θα τους πιέσουν χρονικά σ' όλα τα θέματα.

Συνεπώς κρίνουμε ότι οι επιδόσεις των υποψηφίων θα κινηθούν πτωτικά στο συγκεκριμένο μάθημα.

