ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2012

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Τετάρτη, 23 Μαΐου 2012
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),\ x \in R$$

Μονάδες 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής Χ, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_o εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_o$ (μονάδες 2).

γ) Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2).

δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim\limits_{x \to x_o} ημx = ημx_o,\ x_o \in R$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σελ. 31 σχολικό βιβλίο

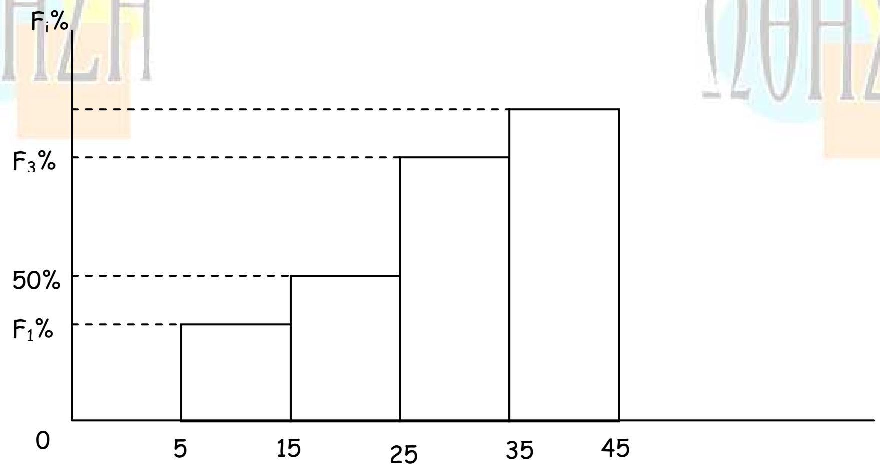
Α2. Σελ. 148 σχολικό βιβλίο

Α3. Σελ. 96 σχολικό βιβλίο

Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	xi	vi	fi%	Ni	Fi%
[5, .)		α+4			
[. , .)		3α-6			
[. , .)		2α+8			
[. , 45)		α-2			
Σύνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84}$ ≈9,17)

Μονάδες 8

B4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων βρίσκοντας που αντιστοιχεί το 50% έχουμε **δ=25,** επειδή η αθροιστική σχετική συχνότητα της διαμέσου είναι 50%.

B2. Αφού δ=25 τότε (από τον ορισμό της διαμέσου) είναι $\nu_1+\nu_2=\nu_3+\nu_4$. Άρα $\alpha+4+3\alpha-6=2\alpha+8+\alpha-2 \Leftrightarrow \alpha=8$.

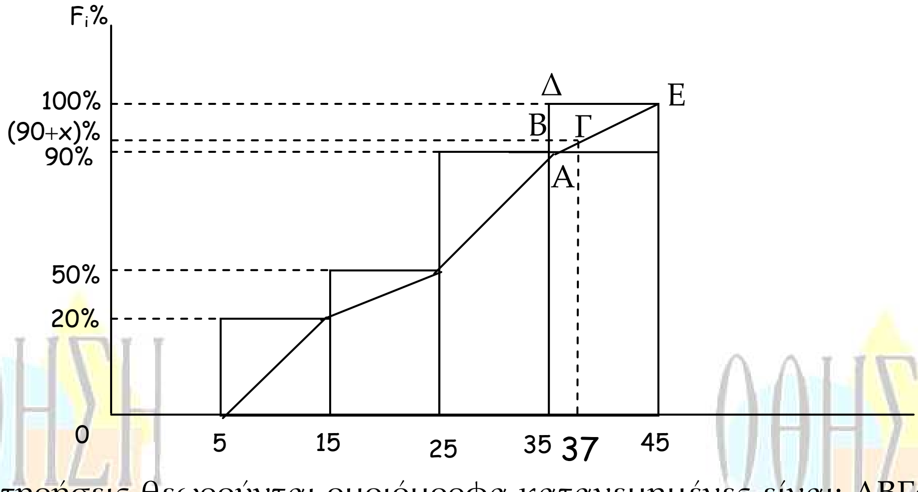
Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	fi%	Ni	Fi%
[5, 15)	**10**	**12**	**20**	**12**	**20**
[15, 25)	**20**	**18**	**30**	**30**	**50**
[25, 35)	**30**	**24**	**40**	**54**	**90**
[35, 45)	**40**	**6**	**10**	**60**	**100**
Σύνολο	**-**	**60**	**100**	**-**	**-**

B3. Είναι $\bar{x}=\Sigma x_i f_i=24$ λεπτά. (από πίνακα) (δεν έχει γραφεί η στήλη $x_i\nu_i$)

$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_1^4\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i=\sum_1^4\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i$=[(10–24)²·0,2+(20–24)²·0,3+(30–24)²·0,4+(40–24)²·0,1]=

=(39,2+4,8+14,4+25,6)=84 άρα $s^2=\sqrt{84}\approx 9,17$.

B4.



Αφού οι παρατηρήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες είναι: ΑΒΓ≈ΑΔΕ άρα $\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}\Leftrightarrow\frac{x}{10}=\frac{2}{10}\Leftrightarrow x=2$. Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά είναι $(100-(F_3+2))\%=8\%$.

Ή επειδή από 35–37 ανήκει το 20% των παρατηρήσεων της 4ης κλάσης το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά άρα από 37-45 είναι το 8%.

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu = 3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Έστω τα ενδεχόμενα :

Γ: « Ο μαθητής μαθαίνει γαλλικά» με $P(\Gamma)= \dfrac{3\nu}{\nu^2+1}$

Ι : « Ο μαθητής μαθαίνει ισπανικά» με $P(I)= \dfrac{\nu+2}{\nu^2+1}$

Γ∩Ι: « Ο μαθητής μαθαίνει και τις δύο » με $P(\Gamma\cap I)= \dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Γ∪Ι: « Ο μαθητής μαθαίνει μια τουλάχιστον απο τις δύο» με

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2(\sqrt{x^2+3}^{\,2}-2^2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x^2+3-4)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\frac{2\cdot(-2)}{-1\cdot(2+2)}=1$$

Αφού $P(\Gamma\cup I)=1$ το ενδεχόμενο Γ∪Ι είναι βέβαιο, αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα επειδή επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή από την τάξη.

Γ2. Ισχύει ότι : P(Γ)+P(Ι)−P(Γ∩Ι)=P(Γ∪Ι) ⇔ $\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=1$

$\Leftrightarrow \frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}=1 \Leftrightarrow 2\nu+1=\nu^2+1 \Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0 \Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0 \Leftrightarrow \nu=0$ ή $\nu=3$

Αφού $\nu\geq 3$, από υπόθεση, τότε $\nu=3$

Γ3. Για $\nu=3$, $P(\Gamma)=\frac{9}{10}$, $P(I)=\frac{5}{10}$, $P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10}$

Είναι (Γ−Ι)∪(Ι−Γ): «Ο μαθητής μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες».

Επειδή $(\Gamma-I)\cap(I-\Gamma)=\varnothing$

$P((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)) = P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma) = P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap I) = \frac{3}{5}$

Γ4. Ισχύει ότι $N(\Gamma\cap I)=32$ τότε

$P(\Gamma\cap I)=\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10}=\frac{32}{\nu} \Leftrightarrow 4\nu=320 \Leftrightarrow \nu=80$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω M(x, f(x)), x > 0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα y′y τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο K(x, 0) και η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα x′x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Λ(0, f(x)). Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1, f(1)). Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), i=1,2,…,10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A\cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι $f(P(A))+f(P(A\cap B)) \geq 2f(P(A\cup B))$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2 x)'x-(x)'(1+\ln^2 x)}{x^2}=\frac{2\ln x(\ln x)'x-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x\frac{1}{x}x-1-\ln^2 x}{x^2}=$$

$$=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (\ln x-1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$

Επειδή $(\ln x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq e$, $x^2>0$ για $x>0$

Είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\neq e$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου για την f' και για τις μεταβολές της f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f		↘		↘	

Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, e]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και επειδή f συνεχής στο $x_0=e$ η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΟΚΜΛ που είναι ορθογώνιο δίνεται από τον τύπο Ε=(ΟΚ)(ΟΛ) άρα είναι $E(x)=x|f(x)|=1+\ln^2 x$, $x>0$, επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

Είναι $E'(x)=2\ln x(\ln x)'=2\ln x\frac{1}{x}=2\frac{\ln x}{x}$.

$E'(x)=0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

$E'(x)<0 \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x}<0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	0		1		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	0	$+$	
E		↘	min E(1)	↗	

Άρα η Ε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1.

Για x=1 (ΟΚ)=1 και (ΟΛ)=f(1)=1 άρα (ΟΛ)=(ΟΚ) που σημαίνει ότι το ορθογώνιο είναι τετράγωνο

Δ3. Αφού η ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1, f(1)), θα ισχύει $\lambda = f'(1) = -1$.

Άρα (ε) $\psi = -x + \beta$

Σύμφωνα με τη γνωστή εφαρμογή $\bar{\psi} = -\bar{x} + \beta$ ή $\bar{\psi} = -10 + \beta$ και

$s_\psi = |-1| s_x \Leftrightarrow s_\psi = s_x = 2$

Για να είναι το δείγμα των τεταγμένων ομοιογενές πρέπει $CV_\psi \leq 0{,}1$ ή $\frac{s_\psi}{|\bar{\psi}|} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{|\beta - 10|} \leq 0{,}1 \underset{|\beta-10|>0}{\overset{\beta \neq 10}{\Leftrightarrow}} \frac{2}{0{,}1} \leq |\beta - 10| \Leftrightarrow 20 \leq |\beta - 10| \Leftrightarrow \beta - 10 \leq -20$ ή

$\beta - 10 \geq 20 \Leftrightarrow \beta \leq -10$ ή $\beta \geq 30$

Δ4. Επειδή $A \subseteq A \cup B$ ισχύει $P(A) \leq P(A \cup B)$

$A \cap B \subseteq A \cup B$ ισχύει $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

Επειδή $A \neq 0$, $A \cap B \neq 0$ και τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα είναι $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) \neq 0$ άρα είναι

$0 < P(A) \leq P(A \cup B)$

$0 < P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

Και επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Θα ισχύει $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$

$f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$

και με πρόσθεση κατά μέλη

προκύπτει $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης και διακρίνονται για την σαφήνεια των ερωτημάτων. Οι υποψήφιοι που προετοιμάστηκαν με συνέπεια δεν θα αντιμετωπίσουν ιδιαίτερες δυσκολίες.

Αναμένεται, από την σημερινή εξέταση, οι επιδόσεις των υποψηφίων να είναι συγκριτικά με πέρσι βελτιωμένες.