ΩΘΗΣΗ

ΠΡΟΤΥΠΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΘΗΣΗ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2013

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Δευτέρα, 20 Μαΐου 2013
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$

(μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

(μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 14

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 87

Α4. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα
$A = \{\omega_1, \omega_4\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$
Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$
- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=1$, όπου $f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x>0$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A') = \frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B)\cup(B-A)]$ και $P(A'-B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του Β.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{(x^3+x^2)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} =$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$

Οπότε $P(\omega_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Επίσης έχουμε ότι:

$f'(x) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}$, ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$, όταν $x=1$ είναι:

$f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$. Οπότε $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Β2. Αρκεί να δείξω ότι: $\frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le -P(A) \le -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le P(A) \le \frac{2}{3}$

Ισχύει ότι: $A \cap B = \{\omega_1\}$ και $A \cap B \subseteq A$, τότε $P(A \cap B) \le P(A) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} \le P(A)}$

Επίσης $P(A \cup B) \le 1 \Leftrightarrow P(A) + P(\omega_3) \le 1 \Leftrightarrow P(A) \le 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{P(A) \le \frac{2}{3}}$

Β3.

- $\left.\begin{array}{l} P(A') = \frac{3}{4} \\ A' = \{\omega_2, \omega_3\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$

- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

  $P(\omega_4) + 1 = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$
- $A - B = \{\omega_4\}$ και $B - A = \{\omega_3\}$ άρα $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$

  τότε $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3}$
- $\left.\begin{array}{l} A' = \{\omega_2, \omega_3\} \\ B' = \{\omega_2, \omega_4\} \end{array}\right\} \Rightarrow A' - B' = \{\omega_3\}$ άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι δ=75
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[...,...)		
[...,...)		
[...,...)		
[...,...)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι f_1=0,1, f_2=0,3, f_3=0,2, f_4=0,4
Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$.

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ < ν, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με
- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Η μικρότερη παρατήρηση είναι t_{min}=50 και x_4=85 η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης. Αν θεωρήσουμε c το πλάτος της κάθε κλάσης τότε είναι:

$$50+c+c+c+\frac{c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+3c+\frac{c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+\frac{7c}{2}=85 \Leftrightarrow c=10$$

Γ2. Ισχύει ότι $f_4=2f_3$ (1) και δ=75 συνεπώς $f_1\%+f_2\%+\frac{f_3\%}{2}=50\%$ ή $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0{,}5$ (2)

Επιπλέον $f_1+f_2+f_3+f_4=1$ (3). Τότε (3)−(2)$\Leftrightarrow$ $\frac{f_3}{2}+f_4=0,5$ (4)

Η (4)$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\frac{f_3}{2}+2f_3=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{5f_3}{2}=0{,}5 \Leftrightarrow \boxed{f_3=0{,}2}$

Τότε λόγω της (1) $\boxed{f_4=0{,}4}$

Άρα η (2) γράφεται: $\boxed{f_1+f_2=0{,}4}$ (5)

Καθώς η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}$=74 ισχύει:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 74=\sum x_i f_i \Leftrightarrow 74=55\cdot f_1+65\cdot f_2+75\cdot f_3+85\cdot f_4 \Leftrightarrow 74=55\cdot f_1+65\cdot f_2+75\cdot 0{,}2+85\cdot 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow 74=55\cdot f_1+65\cdot f_2+15+34 \Leftrightarrow \boxed{25=55\cdot f_1+65\cdot f_2} \quad (6)$$

Η (6) $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $25=55\cdot(0{,}4-f_2)+65\cdot f_2 \Leftrightarrow 25=22-55\cdot f_2+65\cdot f_2 \Leftrightarrow 3=10\cdot f_2 \Leftrightarrow \boxed{f_2=0{,}3}$ άρα από (5) $\boxed{f_1=0{,}1}$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	**Σχετική Συχνότητα f_i**
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1

Γ3. Αν $\bar{x}_A$ είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 και $\bar{x}_B$ η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες του 80 και αντίστοιχα ν_A το πλήθος των παρατηρήσεων μέχρι 80 και ν_B το πλήθος από 80 έως 90 θα ισχύει

$\frac{\bar{x}_A\nu_A + \bar{x}_B\nu_B}{\nu_A+\nu_B}$=74 ή $\frac{\bar{x}_A\nu_A + \bar{x}_B\nu_B}{\nu}$=74 ή $\bar{x}_A\frac{\nu_A}{\nu}+\bar{x}_B\frac{\nu_B}{\nu}$=74 ή $\bar{x}_A f_A+\bar{x}_B f_B$=74 ή $\bar{x}_A (f_1+f_2+f_3)+ \bar{x}_B \cdot 0,4=74$ ή $\bar{x}_A \cdot 0,6+\bar{x}_B \cdot 0,4=74$ και αφού $\bar{x}_B=85$ κεντρική τιμή της 4ης κλάσης: $\bar{x}_A \cdot 0,6+85\cdot 0,4=74 \Leftrightarrow \bar{x}_A \cdot \frac{6}{10}=74-85\cdot\frac{4}{10} \Leftrightarrow 6\bar{x}_A=740-340 \Leftrightarrow \bar{x}_A=\frac{400}{6} \Leftrightarrow$

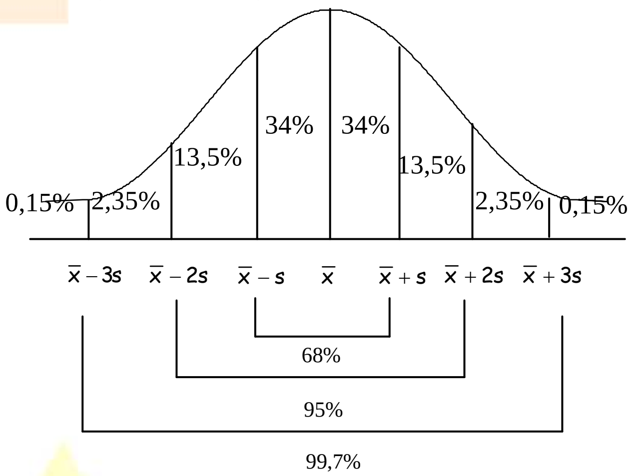
$\bar{x}_A=\frac{200}{3}$

<u>**Παρατήρηση:**</u> Το $\bar{x}'$ των τριών πρώτων κλάσεων **δεν** δίνεται από τη σχέση $\bar{x}'=\sum_{i=1}^{3}x_if_i$ καθώς για τις τρείς πρώτες σχετικές συχνότητες του αρχικού δείγματος f_1, f_2, f_3 ισχύει ότι $f_1+f_2+f_3=0,6 \neq 1$

Συνεπώς με αναγωγή στη μονάδα προκύπτει $f_1'=\frac{0,1}{0,6}=\frac{1}{6}$, $f_2'=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2}$, $f_3'=\frac{0,2}{0,6}=\frac{1}{3}$.

Στην περίπτωση αυτή $\bar{x}'=\sum x_if_i'=55\cdot\frac{1}{6}+65\cdot\frac{1}{2}+75\cdot\frac{1}{3}=\frac{55+195+150}{6}=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$

Γ4. Σε μια κανονική κατανομή τα ποσοστά κατανέμονται ως εξής:



Άρα ποσοστό 2,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται πάνω από τη χαρακτηριστική τιμή $\bar{x}+2s$ συνεπώς $\bar{x}+2s=74$ (1)

Άρα ποσοστό 16% των παρατηρήσεων βρίσκεται κάτω από τη χαρακτηριστική τιμή $\bar{x}-s$ συνεπώς $\bar{x}-s=68$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2), προκύπτει: (1)–(2) $\Rightarrow 3s=6 \Leftrightarrow s=2$ και $\bar{x}=70$

Το δείγμα ως προς την ομοιογένεια χαρακτηρίζεται από το συντελεστή μεταβολής που είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}<\frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1,f(1)) , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού Ε , με $E < 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :
Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in R$ με $\lambda > 0$.
Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών f(α), f(β), f(γ), f(e), $f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x)=x\ln x + 2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n,\ n = 1,2,3,\ldots,30 : 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα
Α={ $t \in \Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x'x οξεία γωνία },
Β = { $t \in \Omega$: $f(t) > f'(t)+1$}, όπου $f(t) = t\ln t + 2$
Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α

(μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β

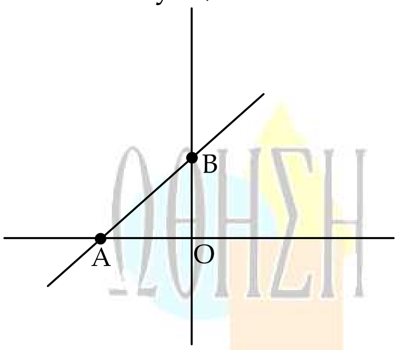
(μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. $f(x)=x\ln x+\kappa$, $x>0$, $\kappa \in Z$, $\kappa > 1$
$f'(x)=\ln x+1$
$f'(1)=1$, $f(1)=\kappa$
Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της (1,f(1)) είναι: $y= f'(1)x+\beta$, άρα $y=x+\beta$
Για $x=0$, $y=\kappa-1 > 0$ B(0, κ–1)

Για y=0, x=1–κ < 0 B(1–κ, 0)



$E_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}|1-\kappa|\cdot|\kappa-1|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2,\ \kappa>1$

$E<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2\Leftrightarrow(\kappa-1)^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow -2<\kappa-1<2\Leftrightarrow$

$-1<\kappa<3$, $\kappa\in Z$ με $\kappa>1$, άρα $1<\kappa<3\Rightarrow\kappa=2$.

Δ2. α) Για κ=2 , η (ε) γίνεται y=x+1 και οι τεταγμένες των 50 σημείων ικανοποιούν την : $y_i=x_i+1$ οπότε $x_i=y_i-1$, i=1, 2, 3,…, 50. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $\bar{x}=\bar{y}-1=31-1=30$

β) Οι νέες τιμές είναι:

$z_1=x_1+3$	$z_{21}=x_{21}$	και	$z_{36}=x_{36}-\lambda$, $\lambda>0$
$z_2=x_2+3$	$z_{22}=x_{22}$		$z_{37}=x_{37}-\lambda$
….	…		…
$z_{20}=x_{20}+3$	$z_{35}=x_{35}$		$z_{50}=x_{50}-\lambda$

Πρέπει $\bar{z}=31\Leftrightarrow\dfrac{\sum_{i=1}^{20}z_i+\sum_{i=21}^{35}z_i+\sum_{i=36}^{50}z_i}{50}=31\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{20}z_i+\sum_{i=21}^{35}z_i+\sum_{i=36}^{50}z_i=1550\Leftrightarrow$

$\sum_{i=1}^{20}(x_i+3)+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}(x_i-\lambda)=1550\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{20}x_i+3\cdot20+\sum_{i=21}^{35}x_i+\sum_{i=36}^{50}x_i-15\lambda=1550$

$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{50}x_i+60-15\lambda=1550\Leftrightarrow$ $\left(\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{50}=30 \text{ άρα } \sum x_i=1550\right)$

$\Leftrightarrow 1500+60-15\cdot\lambda=1550\Leftrightarrow 15\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$

Δ3. $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$, με $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7$

$f(\alpha)=\alpha\ln\alpha+2=\ln\alpha^\alpha+2$

$f(\beta)=\beta\ln\beta+2=\ln\beta^\beta+2$

$f(\gamma)=\gamma\ln\gamma+2=\ln\gamma^\gamma+2$

$f(x)=x\ln x+2$, $x>0$

$f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x>\ln e^{-1}\Leftrightarrow x>e^{-1}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f′(x)		−		+
f		↘		↗

Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}+2=-\frac{1}{e}+2>0$ και

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+1=0$,

Είναι $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$, $f\uparrow$ στο $[\frac{1}{e},+\infty)$, άρα $f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$,

Άρα $f'\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ και επειδή $f(e)=e+2$

είναι, $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2$

$$\bar{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5}=\frac{\ln\alpha^{a}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+e+8}{5}=$$

$$=\frac{\ln(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma})+e+8}{5}=\frac{\ln e^{7}+e+8}{5}=\frac{e+15}{5}=\frac{e}{5}+3$$

Δ4. α) Πρέπει $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

Άρα, $A=\{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$, άρα $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) $f(t)>f'(t)+1 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t\cdot\ln t+2>\ln t+2 \Leftrightarrow t\cdot\ln t>\ln t \Leftrightarrow t\cdot\ln t-\ln t>0 \Leftrightarrow$

$\ln t(t-1)>0 \underset{t\neq 1, t\leq t_{29}\ (t_{30}=1)}{\overset{t\leq 1}{\Leftrightarrow}} \ln t<0 \Leftrightarrow 0<t<1$

άρα $B=\{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$

$A\cap B=\{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$

άρα $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα έχουν τα εξής χαρακτηριστικά: καλύπτουν όλο το εύρος της ύλης και διακρίνονται για τον αυξημένο βαθμό δυσκολίας συγκριτικά με τις προηγούμενες εξετάσεις όλων των ετών.

Οι μαθητές έπρεπε να είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι να έχουν ευχέρεια στον χειρισμό των πράξεων και να έχουν αυξημένη κριτική ικανότητα. Κρίνουμε ότι οι σημερινές επιδόσεις θα είναι σημαντικά μικρότερες των προηγούμενων ετών.