ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΤΡΙΤΗ, 30 ΜΑΪΟΥ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

Α. (α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;

(2,5 μονάδες)

(β) Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ δεδομένο διάνυσμα και Μ΄(x΄,y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$.

(5 μονάδες)

(γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(5 μονάδες)

Β1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
T_1: «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x»	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2: «στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$»	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(3 μονάδες)

B2. Θεωρούμε το γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα $A = A_1A_2 - A_2A_1$, όπου A_1, A_2 είναι οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως του ερωτήματος Β1.

(α) Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός.

(4,5 μονάδες)

(β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon : 2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού Τ.

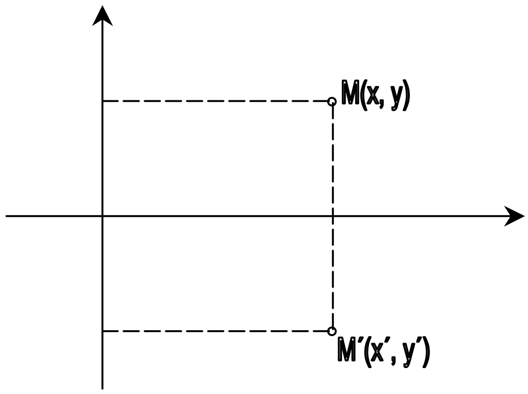
(5 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Α. (α) Θεωρία σελ. 62 (σχολικό βιβλίο)
(β) Θεωρία σελ. 67 (σχολικό βιβλίο)
(γ) Θεωρία σελ. 68 (σχολικό βιβλίο)

Β1. T_1: «Συμμετρία ως προς άξονα x΄x»

Σχηματική παράσταση



με $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{cases}$, άρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ δηλαδή $T_1 \to (3)$.

T_2: «Στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$»

Ο πίνακας είναι $\begin{bmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{bmatrix}$ και για $\theta = \frac{\pi}{2}$ γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \text{συν}\frac{\pi}{2} & -\text{ημ}\frac{\pi}{2} \\ \text{ημ}\frac{\pi}{2} & \text{συν}\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $T_2 \to (2)$

Β2. Είναι $A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ και $A_2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Επομένως είναι:

$$A=A_1A_2-A_2A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

(α) Είναι $|A|=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0$, άρα ο Τ είναι κανονικός.

(β) Για τον Τ είναι:

$$\begin{cases}x'=0\cdot x+(-2)y\\ y'=-2x+0\cdot y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-2y\\ y'=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x' & (1)\\ x=-\dfrac{1}{2}y' & (2)\end{cases}$$

Αν Μ(x, y) είναι σημείο της (ε) με $(\varepsilon): 2x-y+5=0$ (3), και $M'(x',y')$ η εικόνα του Μ μέσω του μετασχηματισμού Τ τότε:

$$(3)\underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightarrow}}2(-\frac{1}{2}y')-(-\frac{1}{2}x')+5=0\Leftrightarrow -y'+\frac{1}{2}x'+5=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2y'+x'+10=0$$

άρα είναι $-2y+x+10=0$ η εξίσωση της εικόνας της (ε) ως προς τον μετασχηματισμό Τ.

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{5+i}{2+3i}$.

(α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha+\beta i,\ \ \alpha,\beta\in R$.

(4 μονάδες)

(β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

(5 μονάδες)

Στις ερωτήσεις (γ), (δ) να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(γ) Αν $\theta=\mathrm{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

Α. $\dfrac{\pi}{4}-\theta$ Β. $\dfrac{\pi}{2}+\theta$

Γ. $\theta-\dfrac{\pi}{2}$ Δ. $\pi+\theta$

(3 μονάδες)

(δ) Το z^4 είναι ίσο με:

A. 4 B. 4ι

Γ. –4i Δ. –4

(3 μονάδες)

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$.

(10 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Α. (α) Είναι:

$$z = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{2^2+3^2} = \frac{10-15i+2i+3}{13} = \frac{13-13i}{13} =$$
$$= 1-i$$

(β) Εϊναι $|z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ και $\begin{cases} \text{συν}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ημ}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Άρα $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Επομένως $z = \sqrt{2}[\text{συν}(-\frac{\pi}{4}) + i\text{ημ}(-\frac{\pi}{4})]$.

(γ) Θεωρία, σελ. 104 (σχολικό βιβλίο) $\rightarrow$ (Β)

(δ) Επειδή $z = \sqrt{2}[\text{συν}(-\frac{\pi}{4}) + i\text{ημ}(-\frac{\pi}{4})]$ είναι:

$$z^4 = (\sqrt{2})^4 \cdot [\text{συν}(-\frac{\pi}{4}) + i\text{ημ}(-\frac{\pi}{4})]^4 = 2^2 \cdot [\text{συν}(-\pi) + i\text{ημ}(-\pi)] =$$
$$= -4$$

άρα (Δ).

Β. Είναι $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |z-(1+0i)| = |z-(0+i)|$ (1).

Επομένως, οι εικόνες των μιγαδικών z είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(1, 0) και Β(0, 1).

Από την (1), για $z = x+yi, \quad x, y \in R$ είναι:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x$$

δηλαδή η μεσοκάθετος του ΑΒ έχει εξίσωση y=x.

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & , 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x} & , x\geq 5 \end{cases}$$

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

(6 μονάδες)

Β. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=5$.

(10 μονάδες)

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος Β να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

(9 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Α. Είναι:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 5^2-8\cdot 5+16=1$$

και

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=(\alpha^2+\beta^2)\ln(5-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-5}=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+1)==$$
$$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$$

Β. Για να είναι η f συνεχής στο x_0=5 πρέπει:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)=f(5)\Leftrightarrow 1=\alpha^2+\beta^2+2\alpha+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha+1=0\Leftrightarrow(\alpha+1)^2+\beta^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \text{και}\\ \beta=0\end{cases}$$

Γ. Για α=–1 και β=0 είναι

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16, & 0<x<5 \\ \ln(x-5+e), & x\geq 5\end{cases}$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5+e)=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-5+e)=+\infty$.

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγηση του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1} - 2$:

(α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).

(6 μονάδες)

(β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωση του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

(6 μονάδες)

(γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t=8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t=10 η επίδραση στον οργανισμό του έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$)

(13 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2$, $t \geq 0$.

(α) Επειδή $\frac{1}{t+1} = \frac{(t+1)'}{t+1}$ με $t+1 > 0$, είναι $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t + c$,

με $f(0) = 0$ (το φάρμακο χορηγείται πρώτη φορά), άρα

$$8\ln(0+1) - 2 \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

και $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t, \quad t \geq 0$.

(β) Είναι $f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 = \frac{8-2(t+1)}{t+1} = \frac{6-2t}{t+1}$, ομόσημη του 6–2t.

Είναι:

t	0		3	
6–2t		+	0	–
f′(t)		+	0	–
f(t)		↗		↘

Για t=3 η συγκέντρωση είναι μέγιστη.

(γ) Έχουμε:

- Για t=8 είναι $f(8) = 8\ln 9 - 16 = 8\ln 3^2 - 16 = 16\ln 3 - 16 = 16(\ln 3 - 1)$
  Επειδή 3>e είναι $\ln 3 > \ln e = 1$, άρα f(8)>0.
  Δηλαδή υπάρχει φάρμακο, άρα και επίδραση στον οργανισμό

- Για t=10 είναι $f(10) = 8\ln 11 - 20 \cong 8 \cdot 2{,}4 - 20 = -0{,}8 < 0$.
  Δηλαδή δεν υπάρχει φάρμακο, άρα και επίδραση στον οργανισμό.

ΣΧΟΛΙΑ

- **Τα ζητούμενα καλύπτουν ικανοποιητικά την ύλη**
- **Για ορισμένες ερωτήσεις απαιτείτο ιδιαίτερα καλή προετοιμασία.**
- **Η αντιμετώπιση των θεμάτων 3Β, 3Γ, 4γ απαιτούσε αυξημένη συνθετική ικανότητα, καθώς και υποδομή σε ζητήματα μελέτης σύνθετων συναρτήσεων και της λογαριθμικής.**

Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.