Σάββατο, 02 Ιουνίου 2001
ΘΕΤΙΚΗ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. 1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(Μονάδες 7,5)

λύση

Είναι

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} =$$
$$= |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2 \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

Α. 2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\overline{z}|$

δ. $|z| = |\overline{z}|$

ε. $|i \cdot \overline{z}| = |z|$

(Μονάδες 5)

λύση

Οι σωστές απαντήσεις είναι

α. Σ - **β. Λ** - **γ. Λ** - **δ. Σ** - **ε. Σ**

Β. 1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\|z_1 \cdot z_2\|$	α. 4
2. $\|z_1^2\|$	β. 2
3. $\|z_2\|^2$	γ. 25
4. $-\|\overline{z_1}\|$	δ. -5
5. $\|i \cdot z_2\|$	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

(Μονάδες 7,5)

λύση

Έχουμε ότι

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \ |z_2| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Οι σωστές αντιστοιχίσεις είναι

1. ζ - 2. γ - 3. α - 4. δ - 5. β

Β. 2. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

(Μονάδες 5)

λύση

Είναι

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$$

ΘΕΜΑ 2

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$. (Μονάδες 9) β. Να βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)). (Μονάδες 7)

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1 και x=2.
(Μονάδες 9)

λύση

α. Εφόσον f συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$, άρα

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$$

Επομένως είναι

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-}(\alpha x^2) = 9\alpha = f(3) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 3+} \frac{-e^{x-3}\cdot(x-3)'}{1} = \lim_{x\to 3+}(-e^{x-3}) = -1 \quad (2)$$

Άρα, από (1), (2) είναι

$$9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$$

β. Είναι, για x>3

$$f'(x) = \frac{(1-e^{x-3})'\cdot(x-3)-(1-e^{x-3})\cdot(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2} =$$

$$= -\frac{e^{x-3}(x-3)+1-e^{x-3}}{(x-3)^2} = -\frac{e^{x-3}(x-3-1)+1}{(x-3)^2} =$$

$$= -\frac{e^{x-3}(x-4)+1}{(x-3)^2}$$

Είναι

$$f'(4) = -1$$

και

$$f(4) = \frac{1-e^{4-3}}{4-3} = \frac{1-e}{1} = 1-e$$

άρα

$$f(4) = 1-e$$

οπότε η εξίσωση εφαπτόμενης είναι

$$y-f(4) = f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y-(1-e) = (-1)\cdot(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y-1+e = -x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x+5-e$$

άρα

$$(\varepsilon):\ y = -x+5-e$$

γ. Στο διάστημα [1, 2] είναι $f(x)=-\frac{1}{9}x^2$, άρα $f(x)<0$ για $x\in[1,2]$. Οπότε είναι

$$E=-\int_1^2 f(x)dx=-\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{27}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι

$$f^3(x)+\beta\cdot f^2(x)+\gamma\cdot f(x)=x^3-2x^2+6x-1$$

για κάθε $x\in R$, όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. (Μονάδες 10)

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (0, 1). (Μονάδες 7)

λύση

α. Έστω ότι παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in R$. Τότε, από Θεώρημα Fermat είναι $f'(x_0)=0$ και παραγωγίζοντας τη δοθείσα έχουμε:

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta f(x)\cdot f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6 \quad (1)$$

και για $x=x_0$ είναι

$$0=3x_0^2-4x_0+6$$

άτοπο, γιατί το τριώνυμο $3x^2-4x+6$ έχει $\Delta=16-72=-56<0$, οπότε $3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in R$.

β. Έχουμε από την (1)

$$(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma)\cdot f'(x)=3x^2-4x+6$$

Επειδή η διακρίνουσα του $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ είναι $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$ θα είναι $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$, οπότε

$$f'(x)=\frac{3x^2-4x+6}{3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma}>0$$

για κάθε $x\in R$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Σχόλιο: Η απόδειξη του (β) καλύπτει και το (α).

γ. Είναι

$$f(x)\cdot(f^2(x)+\beta f(x)+\gamma)=x^3-2x^2+6x-1,\ x\in R$$

Η διακρίνουσα του $f^2(x)+\beta f(x)+\gamma$ είναι

$$\Delta=\beta^2-4\gamma=\beta^2-3\gamma-\gamma$$

και επειδή $\gamma>\frac{\beta^2}{3}\geq 0$ από υπόθεση, δηλαδή γ>0, επομένως –γ<0, άρα Δ<0, οπότε $f^2(x)+\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+6x-1}{f^2(x)+\beta f(x)+\gamma}$$

Είναι

$$f(0)=-\frac{1}{f^2(0)+\beta f(0)+\gamma}<0,\qquad f(1)=\frac{4}{f^2(1)+\beta f(1)+\gamma}>0$$

οπότε είναι $f(0)\cdot f(1)<0$, και επειδή f συνεχής στο διάστημα [0, 1], από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$

(ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 t\cdot f^2(xt)dt$, για κάθε $x\in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2,\ \text{για κάθε } x\in R$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2x\cdot f^2(x)$. (Μονάδες 10)

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. (Μονάδες 4)

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. (Μονάδες 4)

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x\cdot f(x)\cdot \eta\mu(2x))$. (Μονάδες 7)

λύση

α. Θέτουμε $x \cdot t = u \Leftrightarrow t = \frac{u}{x}$ με $x \neq 0$. Είναι $t = 0 \to u = 0,\ t = 1 \to u = x$.

Έχουμε

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^x \frac{u}{x} f^2(u) \frac{du}{x} = 1 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x u f^2(u) du =$$

$$= 1 - 2\int_0^x u f^2(u) du, \quad \text{για } x \neq 0$$

Λόγω συνέχειας της f είναι

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2\int_0^x u f^2(u) du \right) = 1$$

άρα

$$f(x) = 1 - 2\int_0^x u f^2(u) du, \ x \in R$$

επομένως

$$f'(x) = -2x \cdot f^2(x), \ x \in R$$

β. Είναι

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2 \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0, \ x \in R$$

άρα $g(x) = c,\ x \in R$.

γ. Είναι $f(0) = 1$, οπότε $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$. Επομένως $g(x) = 1,\ x \in R$, άρα

$$\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = 1 + x^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$$

δ. Έχουμε $xf(x) \cdot \eta\mu 2x = \frac{x}{1+x^2} \cdot \eta\mu 2x$ με $x > 0$. Ισχύει ότι:

$$-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} \cdot \eta\mu 2x \leq \frac{x}{1+x^2}$$

Είναι

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{x}{1+x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = 0$$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \to +\infty} (xf(x) \cdot \eta\mu 2x) = 0$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα θύμισαν εποχές που η εισαγωγή στις Ανώτατες Σχολές απαιτούσε υψηλή κατάρτιση και ιδιαίτερη συνθετική ικανότητα εκτός των πλαισίων του σχολικού βιβλίου, για να αντιμετωπισθούν θέματα όπως το 3ο και το 4ο.

Το 1ο και το 2ο θέμα απαιτούσαν στοιχειώδεις γνώσεις που αποκομίζονται από το σχολικό βιβλίο.