Πέμπτη, 27 Μαΐου 2004
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

β. $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$.

Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g'(x_0)$$

Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f,η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β] . Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Μονάδες 2

ΛΥΣΗ

Α. Θεώρημα (Fermat) σχολικού σελίδα 260.

Β. Ορισμός σχολικού σελίδα 213.

Γ. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α. $D_f=(0,+\infty)$

Είναι $f'(x)=2x\ln x+x^2\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1) \quad x>0$

Είναι $f'(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2\ln x+1<0 \Leftrightarrow \ln x<-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{2}}$

Ο πίνακας ριζών – προσήμου της f' είναι:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	ο.ελ.	$\nearrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$ και γνήσια αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $e^{-\frac{1}{2}}$ που είναι το

$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{-\frac{1}{2}})^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{e}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2e}$

β. Είναι $f''(x)=(2x\ln x+x)'=2\ln x+2x\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3 \quad x>0$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+3=0 \Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x+3>0 \Leftrightarrow \ln x>-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow 2\ln x+3<0 \Leftrightarrow \ln x<-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x<e^{-\frac{3}{2}}$

Ο πίνακας ριζών – προσήμου της f'' είναι:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f					

Η f είναι κοίλη στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$ και κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $e^{-\frac{3}{2}}$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $e^{-\frac{3}{2}}$ με τιμή

$$f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\ln e^{-\frac{3}{2}}=e^{-3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2e^3}$$

γ. Η f είναι συνεχής στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$ γνήσια φθίνουσα άρα $f((0,e^{-\frac{1}{2}}])=[f(e^{-\frac{1}{2}}),\lim\limits_{x\to o^+}f(x))$.

Είναι $\lim\limits_{x\to o^+}f(x)=\lim\limits_{x\to o^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to o^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{L'H}{=}}\lim\limits_{x\to o^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to o^-}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$

Επομένως $f((0,e^{-\frac{1}{2}}])=[-\frac{1}{2e},0)$ (1)

Η f είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ και γνήσια αύξουσα άρα

$f([e^{-\frac{1}{2}},+\infty))=[f(e^{-\frac{1}{2}}),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln x=+\infty$

Επομένως $f([e^{-\frac{1}{2}},+\infty))=[-\frac{1}{2e},+\infty)$ (2)

Από (1), (2) έχουμε ότι $f((0,+\infty))=[-\frac{1}{2e},0)\cup[-\frac{1}{2e},+\infty)=[-\frac{1}{2e},+\infty)$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση g(x) = e^xf(x), όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}g(x)dx,\ \alpha\in R$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α. Η g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη στο R με

$g'(x) = [e^x f(x)]' = e^x f(x) + e^x f'(x)$ και

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= e^0 f(0) = e\cdot 0 = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) &= e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}\cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$$

άρα από Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$

β. $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} e^x f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} (2x^2 - 3x)e^x dx =$

$$= \int_{\alpha}^{0} (2x^2 - 3x)(e^x)' dx = \left[(2x^2 - 3x)e^x\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} (4x - 3)(e^x)' dx =$$

$$= -(2\alpha^2 - 3\alpha)e^{\alpha} - \left[(4x - 3)e^x\right]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} 4e^x dx =$$

$$= -(2\alpha^2 - 3\alpha)e^{\alpha} - \left[-3e^0 - (4\alpha - 3)e^{\alpha}\right] + 4\left[e^x\right]_{\alpha}^{0} =$$

$$= -(2\alpha^2 - 3\alpha)e^{\alpha} + 3 + (4\alpha - 3)e^{\alpha} + 4(e^0 - e^{\alpha}) =$$

$$= -(2\alpha^2 - 3\alpha)e^{\alpha} + (4\alpha - 3)e^{\alpha} + 4 - 4e^{\alpha} + 3 =$$

$$= (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3 - 4)e^{\alpha} + 7 =$$

$$= (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^{\alpha} + 7$$

γ. $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} [(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^{\alpha} + 7]$ (1)

Είναι $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} [(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^{\alpha}] = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{\frac{1}{e^{\alpha}}} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$

$= \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)'}{(e^{-\alpha})'} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{(-4\alpha + 7)'}{(-e^{-\alpha})'} = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} \dfrac{-4}{e^{-\alpha}} =$

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty} (-4e^{\alpha}) = -4\cdot 0 = 0$

και από (1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty} [(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7)e^{\alpha} + 7] = 0 + 7 = 7$

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: R → R τέτοια ώστε f(1) = 1. Αν για κάθε x∈R, ισχύει

$$g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0,$$

όπου z = α + βi ∈ C, με α, β∈R*, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον f(2) = α > 0, f(3) = β και α > β, να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 ∈ (2, 3) τέτοιο ώστε $f(x_0)$ = 0.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)=|z|\int_1^{x^3}f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1)$

επειδή f συνεχής στο R και 1∈R η $\int_1^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και x^3 παραγωγίσιμη άρα η $\int_1^{x^3}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων· έτσι επειδή x – 1 παραγωγίσιμη η g είναι παραγωγίσιμη σαν αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων με $g'(x)=|z|f(x^3)(x^3)'-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=|z|f(x^3)3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=$

$$=3|z|x^2f(x^3)-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

β. Ισχύει g(x) ≥ 0 για κάθε x∈R. Επίσης είναι $g(1)=|z|\int_1^1 f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot 0=0$ άρα ισχύει g(x) ≥ g(1) για κάθε x∈R οπότε στο x_0 = 1 η g παρουσιάζει ακρότατο και επειδή g παραγωγίσιμη σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat $g'(1) = 0$ οπότε από

(α) $3|z|1^2 f(1^3) - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| = 0 \Leftrightarrow$ $\qquad f(1) = 1$

$\Leftrightarrow 3|z| - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

γ. Από $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ έχουμε $|z|^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} = 0$$

επειδή $z \neq 0$ αφού $\alpha, \beta \in R^*$ κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών

$z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \overline{(z^2)} = -1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

Σχόλιο: Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το παραπάνω ζητούμενο αντιμετωπίζεται και διαφορετικά όπως:

$|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{|z^2 + 1|}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = |z^2 + 1| \Leftrightarrow$

$|z^2| = |z^2 + 1|$ $\qquad$ Αν $z^2 = \kappa + \lambda i$ θα έχουμε

$\kappa^2 + \lambda^2 = (\kappa + 1)^2 + \lambda^2$

$0 = 2\kappa + 1$

$\kappa = -\frac{1}{2}$

Δηλαδή $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

δ. Έχουμε $z = \alpha + \beta i$ οπότε

$z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$ και λόγω του γ ερωτήματος αφού $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

έχουμε ότι $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2}$ δηλαδή $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0$

Επειδή $\alpha > \beta$ το $\alpha - \beta > 0$ επομένως $\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha$

δηλαδή $\beta < 0$ αφού $\alpha > 0$

Άρα, αφού $f(2) = \alpha > 0$ και $f(3) = \beta < 0$ και η f συνεχής στο [2, 3]

σύμφωνα με Θ.Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα καλύπτουν ευρύ φάσμα της ύλης και διακρίνονται για τη σαφήνεια των ζητουμένων τους. Απαιτούσαν από τους υποψηφίους όλα εκείνα τα στοιχεία που χρειάζονται για να αντιμετωπίσουν το συγκεκριμένο μάθημα, καλή αναπαραγωγή της διδαχθείσας ύλης, κριτική και συνθετική ικανότητα. Υπάρχει κλιμάκωση δυσκολίας που θα έχει ως αποτέλεσμα να διακριθούν και να ξεχωρίσουν οι υποψήφιοι με υψηλή βαθμολογία.