Σάββατο, 27 Μαΐου 2006
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α.2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ'ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z^2$

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)'=x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f′, g′ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 253.
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελ.273
Β. α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1–1".

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α. $f'(x)=2(x-2)>0$, για κάθε $x>2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, οπότε η f είναι και "1–1", άρα υπάρχει f^{-1}.

β. Έστω $y=f(x) \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=y \Leftrightarrow (x-2)^2=y-2$, πρέπει $y\geq 2$, άρα
$x-2=\sqrt{y-2}$ (αφού $x-2\geq 0$, λόγω του ότι $x\geq 2$) έχουμε
$x=2+\sqrt{y-2}$.
Άρα $f^{-1}(y)=2+\sqrt{y-2}$ με $y\geq 2$.
Τελικά $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-2}$ με $D_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

γ. i) Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ και $y=x$ βρίσκονται από τη λύση δύο εκ των εξισώσεων
$f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$, $f^{-1}(x)=x$.
Λύνουμε την $f(x)=x \Leftrightarrow 2+(x-2)^2=x \Leftrightarrow (x-2)^2=x-2 \Leftrightarrow (x-2)^2-(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(x-2-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$.

Επομένως x=2 ή x=3.

Λύνουμε την $f(x)=f^{-1}(x)$,

$2+(x-2)^2=2+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^4=\left(\sqrt{x-2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^4-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)[(x-2)^3-1]=0 \Leftrightarrow (x-2)=0$ ή $(x-2)^3=1$

οπότε x−2=1 ή x=3.

Επειδή η $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει τις ίδιες λύσεις με την $f(x)=x$, η $f^{-1}(x)=x$ έχει επίσης τις ίδιες λύσεις ,οπότε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ και της y=x είναι τα A(2, f(2))=A(2, 2), B(3, f(3))=B(3, 3).

ii) Εφόσον τα σημεία τομής είναι Α, Β το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$E(\Omega)=\int_2^3 |f(x)-f^{-1}(x)|dx = 2\int_2^3 |f(x)-x|dx$ (λόγω συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$ με την y=x)

$$=2\int_2^3 |2+(x-2)^2-x|dx = 2\int_2^3 |(x-2)^2-(x-2)|dx = 2\int_2^3 |(x-2)(x-3)|dx$$

x		2		3	
(x−2)(x−3)	+	0	−	0	+

Άρα

$$E(\Omega)=-2\int_2^3 (x^2-5x+6)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x\right]_2^3=-(9-5\cdot\frac{9}{2}+18)+(\frac{8}{3}-10+12)=$$

$$=-18+45-36+\frac{16}{3}+4=-9+\frac{16}{3}+4=-5+\frac{16}{3}=\frac{1}{3}.$$

Άρα $E(\Omega)=\frac{1}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1-z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που σχηματίζουν αυτές.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. **i.** 1ος τρόπος:

$|z_1-z_2|=|z_3-z_1| \overset{z_1=-z_2-z_3}{\Leftrightarrow} |-z_2-z_3-z_2|=|z_3+z_2+z_3| \Leftrightarrow |2z_2+z_3|=$

$|2z_3+z_2| \Leftrightarrow |2z_2+z_3|^2=|2z_3+z_2|^2 \Leftrightarrow (2z_2+z_3)(2\bar{z}_2+\bar{z}_3)=(2z_3+z_2)(2\bar{z}_3+\bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z_2\bar{z}_2+2z_2\bar{z}_3+2z_3\bar{z}_2+z_3\bar{z}_3=4z_3\bar{z}_3+2z_3\bar{z}_2+2z_2\bar{z}_3+z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z_2\bar{z}_2=3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow |z_2|^2=|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_2|=|z_3|$ αληθές.

Ομοίως $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$

άρα $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

2ος τρόπος:

$|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$ με $z_3=-z_1-z_2$

$|z_1-z_2|=|-z_1-z_2-z_1|$, οπότε $|z_1-z_2|^2=|2z_1+z_2|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=(2z_1+z_2)(2\bar{z}_1+\bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=4z_1\bar{z}_1+2z_1\bar{z}_2+2z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3z_1\bar{z}_2-3\bar{z}_1z_2=3z_1\bar{z}_1 \Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=|z_1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+1=0$ (1)

Από $z_1+z_2=-z_3$ έχουμε $|z_1+z_2|=|-z_3|=1$

άρα $|z_1+z_2|^2=1 \Leftrightarrow (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+1=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+1=0$, οπότε η (1) ισχύει.

Όμοια δείχνουμε ότι $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

3ος τρόπος

Αν $(ΑΒ)=|z_1-z_2|$ τότε $(ΑΒ)^2=|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=$

$=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=1-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)+1=2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$.

Όπως προηγούμενα από $z_1+z_2=-z_3$ προκύπτει

$z_1\bar{z}_1+\bar{z}_1z_2=-1$ άρα

$(ΑΒ)^2=2-(-1)=3$ άρα $(ΑΒ)=\sqrt{3}$

και όμοια $(ΒΓ)=(ΑΓ)=\sqrt{3}$.

ii. 1ος τρόπος

$|z_1-z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\,|z_2|=1^2+1^2+2\cdot1\cdot1=4$

άρα $|z_1-z_2|^2 \le 4$.

Έχουμε $|z_1-z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow 1-\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+1 \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \le 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \ge -1.$

<u>2ος τρόπος</u>

$|z_1 - z_2|^2 \le 4.$

Επειδή τα $A(z_1)$, $B(z_2)$ σημεία του κύκλου C: $|z|=1$,

AB χορδή συνεπώς $(AB) \le 2\rho \Leftrightarrow (AB) \le 2\cdot 1 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \le 4.$

β. Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$, επειδή οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 επαληθεύουν την εξίσωση $|z|=1$, ο γεωμετρικός τόπος των Α, Β, Γ είναι ο κύκλος C: $|z|=1$ ή C: $x^2+y^2=1$.

Από α i) ερώτημα: $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow (AB)=(A\Gamma)=(B\Gamma)$

συνεπώς το $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in R$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Είναι $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$ για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει $x\neq 1$ και $x>0$, άρα το πεδίο ορισμού της $A=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της σαν πράξεις μεταξύ παραγωγισίμων με

$f'(x)=\dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x}<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x)=-1-(-\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\dfrac{1}{x-1}(x+1)-\ln x)=(-\infty)\cdot 2-0=-\infty$,

άρα επειδή f γνήσια φθίνουσα στο (0, 1),

$f((0,1))=(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x))=(-\infty,+\infty)=R$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\dfrac{1}{x-1}(x+1)-\ln x)=(+\infty)\cdot 2-0=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{1}{x-1}(x+1)-\ln x)=1-(+\infty)=-\infty$,

οπότε αφού η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ είναι

$f((1,+\infty))=(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 1^+} f(x))=(-\infty,+\infty)=R$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το R.

β. Επειδή $f((0,1))=R$ και $0\in P$ και f συνεχής υπάρχει $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$ που είναι μοναδικό αφού f είναι γνήσια φθίνουσα.

Επίσης επειδή $f((1,+\infty))=R$ και $0\in R$ και f συνεχής υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=0$ που είναι μοναδικό αφού f είναι γνήσια φθίνουσα. Άρα η f έχει δύο μόνο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Η εφαπτομένη της $g(x)=\ln x$ στο $A(\alpha, \ln\alpha)$ με $\alpha>0$ επειδή g παραγωγίσιμη με $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι :

$\psi-\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha)$ ή $\psi=\dfrac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$ (1)

Η εφαπτομένη της $h(x)=e^x$ στο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta\in R$ επειδή h παραγωγίσιμη με

$h'(x)=e^x$ είναι $\psi-e^\beta=e^\beta(x-\beta)$ ή $\psi=e^\beta x+e^\beta-\beta e^\beta$ (2)

Για να ταυτίζονται οι δύο ευθείες πρέπει:

$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^\beta\\ \ln\alpha-1=e^\beta-\beta e^\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\ln\dfrac{1}{\alpha}=\ln\alpha^{-1}=-\ln\alpha\\ \ln\alpha-1=\dfrac{1}{\alpha}-\beta\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}$ αντικαθιστώντας $e^\beta=\dfrac{1}{\alpha}$

έχουμε: $\ln\alpha-1=\dfrac{1}{\alpha}-(-\ln\alpha)\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow \ln\alpha-1=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\Leftrightarrow$

$\ln\alpha-\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}+1$

$$\ln\alpha(1-\frac{1}{\alpha})=\frac{\alpha+1}{\alpha}\Leftrightarrow \ln\alpha\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{\alpha+1}{\alpha}\Leftrightarrow \ln\alpha(\alpha-1)=\alpha+1\overset{\alpha\neq1}{\Leftrightarrow}\ln\alpha=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0$, που σημαίνει ότι α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

δ. Επειδή τώρα το σύστημα των εξισώσεων για να ταυτίζονται οι δύο εφαπτομένες

$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^{\beta}\\ \ln\alpha-1=e^{\beta}-\beta e^{\beta}\end{cases}$ έχει δύο μοναδικές λύσεις για το α από (β)

$x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,+\infty)$ οπότε υπάρχουν και δύο τιμές για το β από την $e^{\beta}=\dfrac{1}{\alpha}$, και επομένως έχουμε δύο κοινές εφαπτομένες.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

α) Τα σημερινά θέματα, έχουν χαρακτηριστικό ότι δεν καλύπτουν μεγάλο και σημαντικό μέρος της ύλης. Απαιτούσαν περισσότερο αλγεβρική παρά συνθετική ικανότητα με αποτέλεσμα εύκολα οι υποψήφιοι να οδηγηθούν σε αδιέξοδο λόγω πράξεων.

β) Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.