Πέμπτη, 24 Μαΐου 2007
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:
$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 8

Α.2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α.3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx > 0$

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right)' = (f(g(x)))\cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελ. 98
Α.2. Ορισμός Σχολικό βιβλίο σελ. 141
Α.3. Ορισμός Σχολικό βιβλίο σελ.280
Β. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με $\alpha\in R$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z=\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$$

για α=0 και α=2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:
$(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$
για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Έχουμε: $|z|=\dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|}=\dfrac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}}=1$
άρα $M(z)\in C: |z|=1$ ή $M(z)\in C: x^2+y^2=1$

β. Για α=0 έχουμε: $z_1=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$. Έστω $A(z_1)$
Για α=2 έχουμε: $z_2=\dfrac{2+2i}{2+2i}=1$. Έστω $B(z_2)$
i) $(AB)=|z_1-z_2|=|-i+1|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2\nu}=(-i)^{2\nu}=i^{2\nu}=(i^2)^{\nu}=(-1)^{\nu}=(-z_2)^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta\in R$ μια σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	T.M	↘	T.E	↗	

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1)$.

$f''(x)=6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		−	0	+	
f(x)		∩	Σ.Κ	∪	

Οπότε η f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x=0$

β. $f(-1)=-1+3-2\eta\mu^2\theta=2(1-\eta\mu^2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta>0$ αφού $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

$f(1)=1-3-2\,\eta\mu^2\theta=-2(1+\eta\mu^2\theta)<0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x-2\,\eta\mu^2\theta)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

Η f συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και η f γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ άρα

$f((-\infty,-1])=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\,f(-1)]=(-\infty,\,2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Το $0\in(-\infty,\,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ άρα θα υπάρχει $\rho_1\in(-\infty,-1)$ ώστε $f(\rho_1)=0$ το ρ_1 μοναδικό στο $(-\infty,-1)$ αφού η f γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,-1]$.

Η f συνεχής στο $[-1,1]$ και γνήσια φθίνουσα άρα:

$f([-1,1])=[f(1),f(-1)]=[-2(1+\eta\mu^2\theta),\,2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$.

Το $0\in[-2(1+\eta\mu^2\theta),\,2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$ άρα θα υπάρχει $\rho_2\in(-1,1)$ ώστε $f(\rho_2)=0$ και επειδή η f γνήσια φθίνουσα το ρ_2 μοναδικό στο $(-1,1)$.

Η f συνεχής στο $[1,+\infty)$ και γνήσια αύξουσα άρα:

$f([1,+\infty))=[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty)$

Το $0\in[-2(1+\eta\mu^2\theta),+\infty)$ άρα θα υπάρχει $\rho_3\in(1,+\infty)$ ώστε $f(\rho_3)=0$ και επειδή η f γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$ το ρ_3 μοναδικό στο $(1,+\infty)$.

Τελικά η f έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3.

γ. Έχουμε $A(-1,2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1,-2(1+\eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0,-2\eta\mu^2\theta)$

Το $A\in\varepsilon: y=-2x-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=-2(-1)-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=2(1-\eta\mu^2\theta)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\eta\mu^2\theta$ αληθές.

Το $B\in\varepsilon \Leftrightarrow -2(1+\eta\mu^2\theta)=-2\cdot1-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow-2(1+\eta\mu^2\theta)=-2(1+\eta\mu^2\theta)$ αληθές.

Το $\Gamma\in\varepsilon \Leftrightarrow -2\eta\mu^2\theta=-2\cdot0-2\eta\mu^2\theta\Leftrightarrow-2\eta\mu^2\theta=-2\eta\mu^2\theta$ αληθές.

δ. Έχουμε $f(x)-(-2x-2\eta\mu^2\theta)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta$

$=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

$$f(x)-(-2x-2\eta\mu^2\theta)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ή}\\ x=-1\\ \text{ή}\\ x=1\end{cases}$$

Ακόμη

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x^3-x=x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-(-2x-2\eta\mu^2\theta)\right|dx=$$

$$= \int_{-1}^{1} |x^3 - x| dx = \int_{-1}^{0} |x^3 - x| dx + \int_{0}^{1} |x^3 - x| dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x) dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + (-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} - 0) =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0,1] για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0,1] για την οποία ισχύει $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt,\ x \in [0,1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt,\ x \in [0,1]$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα (0,1].

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα (0,1].

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα (0,1]

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right) \cdot x^5}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Είναι $F(0)=\int_0^0 f(t)g(t)dt=0$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο [0,1], αφού f(t), g(t) συνεχείς στο [0,1], με $F'(x)=f(x)g(x)$ (1)

Είναι $g(x)>0$, $x\in[0,1]$ και επειδή f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1] για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)>0$, άρα από (1) $F'(x)>0$, $x\in(0,1)$, οπότε γνησίως αύξουσα στο [0,1], επομένως $x>0 \Leftrightarrow F(x)>F(0)$ δηλαδή $F(x)>0$ για $x\in(0,1]$.

β. Είναι $f(x)\cdot G(x)>F(x) \Leftrightarrow$

$$f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x)g(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt>0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (f(x)g(t)-f(t)g(t))dt>0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (f(x)-f(t))g(t)dt>0 \quad (1)$$

Αν $h(t)=(f(x)-f(t))g(t)$ για $t\in[0,x]$ με $x\le 1$ ισχύει $g(t)>0$ για κάθε $t\in[0,1]$. Από υπόθεση για $t\in[0,x]$ έχουμε $t\le x$ και f γνήσια αύξουσα άρα $f(t)\le f(x) \Leftrightarrow f(x)-f(t)\ge 0$, άρα $h(t)\ge 0$ για κάθε $t\in[0,x]$ και επειδή $h(0)=(f(x)-f(0))g(0)=f(x)g(0)>0$.

αφού $g(0)>0$ (λόγω υπόθεσης $g(x)>0$, $x\in[0,1]$) και $f(x)>0$ αφού από υπόθεση η f γνήσια αύξουσα στο $x\in[0,1]$ και $f(x)\ge f(0)>0$ άρα $h(t)\ge 0$ για $t\in[0,x]$ και όχι παντού μηδέν επομένως $\int_0^x (f(x)-f(t))g(t)dt>0$, για κάθε $x\in(0,1]$.

γ. Θεωρώντας την $\phi(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$, $x\in(0,1]$ που είναι παραγωγίσιμη στο (0,1], αφού F και G παραγωγίσιμες, με

$$\phi'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)\cdot G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=$$

$$=\frac{g(x)(f(x)G(x)-F(x))}{G^2(x)}>0,\ x\in(0,1]$$

αφού $g(x)>0$, $x\in[0,1]$ και $f(x)G(x)-F(x)>0$ από (β) ερώτημα $G^2(x)>0$, άρα φ γνήσια αύξουσα στο (0,1] και επειδή φ συνεχής στο $x_o=1$, στο 1 θα έχει τη μέγιστη τιμή της, οπότε $\phi(x)\le\phi(1)$, $x\in(0,1]$, δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Η συνάρτηση f(t)g(t) είναι συνεχής στο [0,1] ως γινόμενο συνεχών και το 0∈[0,1] άρα η συνάρτηση $\int_0^x f(t)g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [0,1], άρα συνεχής στο x_o=0, δηλαδή $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)g(t)dt = \int_0^0 f(t)g(t)dt = 0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [0,1] και το 0∈[0,1], άρα η συνάρτηση $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [0,1], οπότε συνεχής στο x_o=0, δηλαδή
$\lim_{x\to 0^+}\int_0^x g(t)dt = \int_0^0 g(t)dt = 0$

Η συνάρτηση ημt² είναι συνεχής στο R ως σύνθεση συνεχών και το 0∈R άρα η συνάρτηση $\int_0^x \eta\mu t^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R και επειδή η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο R, η συνάρτηση $\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και συνεχής στο x_o=0, οπότε $\lim_{x\to 0^+}\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt = 0$.

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{f \text{ συνεχής}}{\underset{\text{στο } x_o=0}{=}} f(0) > 0$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \eta\mu t^2 dt}{x^5} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\dfrac{2x}{5}\right) = 1\cdot 0 = 0$

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4} \overset{u=x^4}{\underset{\substack{x\to 0^+\\ u\to 0}}{=}} \lim_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$

Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot \lim_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} = f(0)\cdot 0 = 0$$

Παρακάτω δίνουμε και λύσεις για το ΘΕΜΑ 4ο β) και δ) που δόθηκαν απ'τους μαθητές μας.

β για $x\in(0,1]$ είναι $f(x)=\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$ οπότε από την ζητούμενη αρκεί:

$\dfrac{F'(x)}{G'(x)}\cdot G(x)>F(x)$ $\quad G'(x)=g(x)>0$, $x\in[0,1]$

$F'(x)G(x)>F(x)\cdot G'(x)$ ή

$F'(x)G(x)-F(x)G'(x)>0$ $\quad G^2(x)\neq 0$

$\dfrac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}>0$ ή

αρκεί $\left(\dfrac{F(x)}{G(x)}\right)'>0$ (1) για $x\in(0,1]$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)}{G(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ αφού f συνεχής στο $[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{G(x)} & x\in(0,1]\\ f(0) & x=0\end{cases}$

Στο $[0,x]$ με $0< x\leq 1$ η ϕ είναι συνεχής στο $[0,x]$, παρ/μη στο $(0,x)$ άρα από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε :

$\phi'(\xi)=\dfrac{\dfrac{F(x)}{G(x)}-f(0)}{x}=\dfrac{F(x)-f(0)G(x)}{G(x)\cdot x}$ (1)

Αν $K(x)=F(x)-f(0)\cdot G(x)$ στο $[0,1]$ $\quad K(0)=0$ και

$K'(x)=F'(x)-f(0)G'(x)=f(x)g(x)-f(0)g(x)=g(x)(f(x)-f(0))>0$ για $x\in(0,1)$

Άρα K γνήσια αύξουσα οπότε για $x>0$

$K(x)> K(0)$ δηλαδή $K(x)>0$ επομένως για $\xi\in(0,x)$

$\phi'(\xi)>0$ και επειδή ισχύει για κάθε $x\in(0,1]$ $\phi'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1]$ άρα η (1) ισχύει.

δ Ζητείται να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$ δηλαδή το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{F(x)}{G(x)}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right)$.

Αν $\sigma(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}$ έχουμε ότι $|\sigma(x)|=\left|\dfrac{F(x)}{G(x)}\right|\cdot\left|\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right|\le\dfrac{F(1)}{G(1)}\cdot\left|\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right|$

λόγω του (γ). Οπότε $-\dfrac{F(1)}{G(1)}\cdot\left|\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right|\le\sigma(x)\le\dfrac{F(1)}{G(1)}\cdot\left|\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\right|$ **(1)**

επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2 dt}{x^5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu(x^2)^2\cdot 2x}{5x^4}=\dfrac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}x=\dfrac{2}{5}\cdot 1\cdot 0=0$

λόγω της (1) από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma(x)=0$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

α) Τα σημερινά θέματα καλύπτουν ευρύ φάσμα της ύλης και χαρακτηριστικό τους είναι η σωστή κλιμάκωση της δυσκολίας τους. Για την αντιμετώπισή τους χρειαζόταν από τους μαθητές η καλή αναπαραγωγή των γνώσεων που έχουν αποκτήσει όπως και συνθετική και κριτική ικανότητα για να διεκπεραιώσουν όλα τα θέματα μέσα στην χρονική διάρκεια της εξέτασης.
Ιδιαίτερα τα δύο πρώτα θέματα χαρακτηρίζονται ως εύκολα, το 3ο απαιτητικό για τους καλά προετοιμασμένους μαθητές και το 4ο εκτός της σωστής προετοιμασίας απαιτούσε πρωτοβουλία και ευρηματικότητα στα ερωτήματα (β) και (δ).

β) Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές.