Σάββατο, 24 Μαΐου 2008
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

A.2. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μία συνάρτηση $f:A\to R$ είναι 1–1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \text{ και } f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $αz^2+βz+γ=0$ με $α,β,γ\in R$ και $α\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, $γ\in Δ$ τότε ισχύει

$$\int_α^β f(x)dx = \int_α^γ f(x)dx + \int_γ^β f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελ. 235
Α.2. Ορισμός Σχολικό βιβλίο σελ. 191
Β. **α.** Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i+2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right||z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}|z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος
$C: |z| = 2$ ή $C: x^2+y^2 = 4$ με κέντρο Ο(0,0), ρ=2.

β. $|w-(1-i)| = |w-(3-3i)| \underset{x,y\in R}{\overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow}} |(x-1)+(y+1)i| = |(x-3)+(y+3)i|$

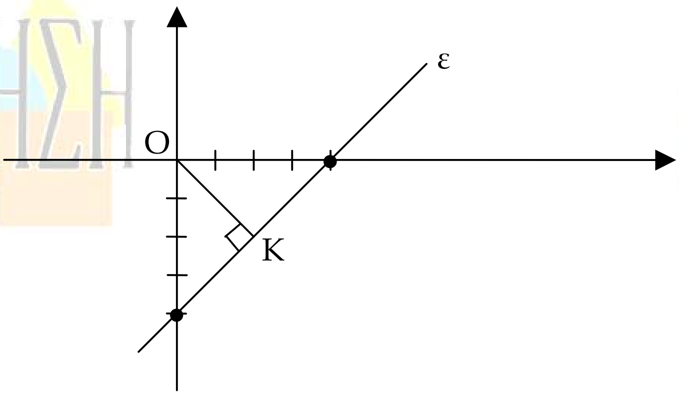
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow 4x-4y = 16 \Leftrightarrow x-y = 4 \Leftrightarrow y = x-4$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του w είναι η ευθεία ε: y=x–4 γ. ε: y=x–4

x	0	4
y	–4	0



Φέρνουμε ΟΚ με ΟΚ⊥ε άρα

$\lambda_{OK}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=-1$

οπότε ΟΚ: y=–x

$$K:\begin{cases} y=-x \\ \varepsilon: y=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -x=x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

άρα K(2,–2).

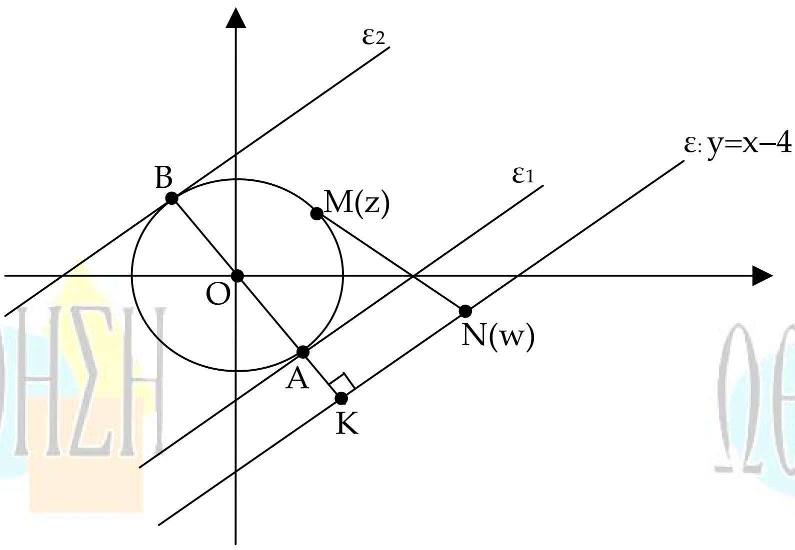
Τελικά ο μιγαδικός $w_1=2-2i$ έχει το μικρότερο μέτρο,

$|w_1|=|2-2i|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

δ. Παρατηρούμε ότι $d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>\rho=2$

άρα ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία.

Αν M(z) και N(w) τότε (MN)=|z – w|



Φέρνουμε ΟΚ⊥ε που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β.

Για την εύρεση των Α, Β επιλύουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} OK: y=-x \\ C: x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{2} \text{ και } y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \text{ και } y=\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Άρα } A(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

Όμως $(AK) \le (MN) \le (BK) \Leftrightarrow$

$(OK)-\varrho \le |z-w| \le (OK)+\varrho$

$2\sqrt{2}-2 \le |z-w| \le 2\sqrt{2}+2$

άρα $|z-w|_{min} = 2\sqrt{2}-2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{-\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x),$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β. Είναι $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1,\ x>0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

Το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		$1/e$		$+\infty$
f΄(x)		−	0	+	
f		↘		↗	

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Όπως φαίνεται από τον πίνακα μονοτονίας της f η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{1}{e}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

$f([0,\frac{1}{e}]) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f\,\gamma\nu.\,\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{=}} [f(\frac{1}{e}),f(0)]=[-\frac{1}{e},0]$

$f([\frac{1}{e},+\infty]) \underset{\text{συνεχής}}{\overset{f\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{=}} [f(\frac{1}{e}),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)]=[-\frac{1}{e},+\infty)$

Άρα $f([0,+\infty)=[-\frac{1}{e},0]\cup[-\frac{1}{e},+\infty)=[-\frac{1}{e},+\infty)$.

γ. Η εξίσωση $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ γίνεται

$x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το α:

i) $\alpha < -\frac{1}{e}$

Επειδή η τιμή α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $\alpha=-\frac{1}{e}$

Είναι $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$, δηλαδή η $\frac{1}{e}$ είναι ρίζα της εξίσωσης η οποία είναι και μοναδική.

Για $0 \le x < \frac{1}{e} \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(\frac{1}{e}) \Leftrightarrow f(x) > -\frac{1}{e}$

Για $x > \frac{1}{e} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(\frac{1}{e}) \Leftrightarrow f(x) > -\frac{1}{e}$

Δηλαδή $f(x) \neq -\frac{1}{e}$ για $x\in[0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},+\infty)$.

iii) Για $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$

Επειδή ο αριθμός $\alpha\in f([0,\frac{1}{e}])$ θα υπάρχει $x_1\in(0,\frac{1}{e})$ ώστε $f(x_1)=\alpha$ και το x_1 είναι μοναδικό λόγω του ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0,\frac{1}{e}]$.

Επειδή ο αριθμός $\alpha\in f([\frac{1}{e},+\infty))$ θα υπάρχει $x_2\in(\frac{1}{e},+\infty)$ ώστε $f(x_2)=\alpha$ και το x_2 είναι μοναδικό λόγω του ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty)$.

Άρα η εξίσωση f(x)=α έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

iv) $\alpha=0$

$f(x)=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

v) $\alpha>0$

Επειδή το $\alpha\notin f([0,\frac{1}{e}])$ η εξίσωση f(x)=α είναι αδύνατη στο $[0,\frac{1}{e}]$.

Επειδή το $\alpha\in f([\frac{1}{e},+\infty))$ θα υπάρχει $x_3\in(\frac{1}{e},+\infty)$ ώστε $f(x_3)=\alpha$ και το x_3 είναι μοναδικό επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty)$.

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{ΠΛΗΘΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ}\\ \text{ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ } f(x)=\alpha\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases}\text{καμμία}, & \alpha<-\frac{1}{e}\\ \frac{1}{e}, & \alpha=-\frac{1}{e}\\ \text{Δύο}, & -\frac{1}{e}<\alpha<0\\ 1, & \alpha=0\\ \text{μία}, & \alpha>0\end{cases}$$

δ. Είναι $f'(x)=\ln x+1,\ x>0$

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$, για $x>0$ άρα f' γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ ώστε να ισχύει

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x) \quad (1)$$

Είναι $\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1),\ x>0.$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt\ -45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=20x^3+6x-45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1.

Μονάδες 3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Έστω $\int_0^2 f(x)dx=c$ τότε $f(x)=(10x^3+3x)c-45$ οπότε έχουμε

$$\int_0^2 f(t)dx=\int_0^2[(10x^3+3x)c-45]dx \Leftrightarrow$$

$$c=c\int_0^2(10x^3+3x)dx-\int_0^2 45dx \Leftrightarrow$$

$$c=c\left[\frac{10x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45[x]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$c=c\left[\frac{5x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45(2-0) \Leftrightarrow$$

$$c=c\left[(\frac{5\cdot 2^4}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2})-0\right]-90 \Leftrightarrow$$

$$c=c(5\cdot 2^3+3\cdot 2)-90 \Leftrightarrow$$

$$c=c\cdot 46-90 \Leftrightarrow 45c=90 \Leftrightarrow c=2$$

Άρα $f(x)=(10x^3+3x)\cdot 2-4 \Leftrightarrow$

$f(x)=20x^3+6x-4$

β. Είναι $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\overset{u=-h}{=}\lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}=$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}=g''(x)$$

γ. **i.** Είναι $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\underset{DH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)(x+h)'-0+g'(x-h)(x-h)'}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{h}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{h}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]= \text{ λόγω του (β)}$$
$$=\frac{1}{2}(g''(x)+g''(x))=g''(x)$$

Οπότε ισχύει $g''(x)=f(x)+45$ λόγω του (α)

$g''(x)=20x^3+6x,\ x\in R$

$g''(x)=(5x^4+3x^2)'$ άρα

$g'(x)=5x^4+3x^2+c_1$ επειδή $g'(0)=1$

και $g'(0)=c_1$ το $c_1=1$

άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+1$ επομένως

$g'(x)=(x^5+x^3+x)',\ x\in R$ άρα

$g(x)=x^5+x^3+x+c$ επειδή $g(0)=1$

και $g(0)=c$ τότε το $c=1$

επομένως $g(x)=x^5+x^3+x+1,\ x\in R$

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0,\ x\in R$ άρα g γνήσια αύξουσα στο R, άρα "1–1".

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Α. Τα σημερινά θέματα είχαν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι η κλιμάκωση δυσκολίας εμφανίζεται σταδιακά αρκετά νωρίς από τα ερωτήματα του 2ου θέματος. Επίσης η εκτεταμμένη διερεύνηση που απαιτούσε το Θέμα 3ο το (γ) στένευε τα περιθώρια χρόνου για τη διαπραγμάτευση των υπόλοιπων ερωτημάτων.

Ακόμη η ξεχωριστή και ιδιαίτερη τεχνική που απιτούσε το θέμα 4ο (α) καθώς και η πρωτοτυπία του θέματος 4 (γ) θα έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση των υψηλών επιδόσεων.

Β. Οι παραπάνω απαντήσεις είναι ενδεικτικές.