



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της
Ωθησης



Δευτέρα, 16 Μαΐου 2011
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε

$x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 260
 A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 280
 A3. α) Σ
 β) Σ
 γ) Λ
 δ) Λ
 ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \text{ και } w = z-3i + \frac{1}{z-3i}$$

- B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

- B2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

- B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.

Μονάδες 8

- B4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- B1. $|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| + |\overline{z-3i}| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| + |z-3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1$
 άρα ο γεωμετρικός τόπος των $M(z)$ είναι κύκλος κέντρου $K(0, 3)$, $\rho=1$

- B2. $|z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i}) = 1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$

- B3. $w = z-3i + \frac{1}{z-3i} \stackrel{(B2)}{=} z-3i + \bar{z}+3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad (1)$

Έχουμε: $|z-3i| = 1 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-3i| = 1 \Leftrightarrow |x+(y-3)i| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 1 \Leftrightarrow$
 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ άρα $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$
 $-2 \leq w \leq 2$

- B4. $|z-w| \stackrel{(B3)}{=} |z-(z+\bar{z})| = |-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι $e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x) \Leftrightarrow (e^x f'(x))' - e^x = (x f'(x))'$ ή $(e^x f'(x) - e^x)' = (x f'(x))'$, $x \in \mathbb{R}$.

άρα σύμφωνα με γνωστή πρόταση $e^x f'(x) - e^x = x f'(x) + c$

απ' όπου για $x=0$ είναι $f'(0) - 1 = c$, άρα $c = -1$,

οπότε $e^x f'(x) - e^x = x f'(x) - 1$

$$(e^x - x) f'(x) = e^x - 1,$$

αφού $e^x > x$ από τη θέση των γραφικών παραστάσεων

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \text{ ή } f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \text{ ή } f'(x) = [\ln(e^x - x)]', \text{ άρα } f(x) = \ln(e^x - x) + c$$

και επειδή $f(0)=0$, $0 = \ln 1 + c$, άρα $c=0$

οπότε $f(x) = \ln(e^x - x)$

Γ2. Επειδή $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Επίσης } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνήσια φθίνουσα $(-\infty, 0]$.

Επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$.

Γ3. Από $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ έχουμε

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} \text{ ή}$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} \text{ ή } f''(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2e^x - xe^x - 1$ συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = 2e^x - e^x - xe^x$$

$$g'(x) = e^x(1 - x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{και } g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$g(x)$		$g(1)$	

Άρα στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η g είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής, άρα

$$g(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(1)]$$

και στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η g είναι γνήσια φθίνουσα και συνεχής, άρα

$$g(\Delta_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1)]$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = (0 - 0 - 1) = -1 \text{ επομένως } g(\Delta_1) = (-1, e - 1],$$

οπότε επειδή $0 \in g(\Delta_1)$ η $g(x) = 0$ έχει ρίζα $x_1 \in (-\infty, 1)$ που είναι και μοναδική.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(2 - x) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Επομένως $g(\Delta_2) = (-\infty, e - 1]$ και επειδή $0 \in g(\Delta_2)$ η $g(x) = 0$ έχει ρίζα $x_2 \in (1, +\infty)$ που είναι μοναδική. Άρα η $f''(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$.

Τώρα επειδή η g είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty, 1)$

για $x < x_1$ ισχύει $g(x) < g(x_1)$ δηλαδή $g(x) < 0$ και

για $x > x_1$ ισχύει $g(x) > g(x_1)$ δηλαδή $g(x) > 0$

άρα η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας x_1

και ανάλογα επειδή στο $(1, +\infty)$ η g γνήσια αύξουσα

για $x > x_2$ ισχύει $g(x) > g(x_2)$ δηλαδή $g(x) > 0$ και

για $x < x_2$ ισχύει $g(x) < g(x_2)$ δηλαδή $g(x) < 0$

Άρα η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας x_2 . Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. Θεωρούμε την $h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ συνεχής με $h(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

και $h(\frac{\pi}{2}) = \ln(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) > 0$ γιατί $\frac{\pi}{2} > 0$ και f γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$

άρα $h(0)h(\frac{\pi}{2}) < 0$ και σύμφωνα με το θ. Bolzano $h(x) = 0$ έχει ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

και επειδή $h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0$, $h'(x) = f'(x) + \eta\mu x > 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ η h γνήσια αύξουσα

στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ άρα η ρίζα μοναδική

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f(\frac{1}{x})}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Θέτουμε $u=x+t$

$$du=dt$$

$$t=0 \Leftrightarrow u=x$$

$$t=-x \Leftrightarrow u=0$$

$$\text{Είναι } \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u} e^{-2x}}{g(u)} du = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Από υπόθεση ισχύει } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{f(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u} e^{-2x}}{f(u)} du = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Από υπόθεση ισχύει

$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{f(u)} du \Leftrightarrow g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (2)$$

Οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}, \frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$ άρα οι συναρτήσεις

$\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Από (1), (2) οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} > 0 \text{ και } g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} > 0 \text{ άρα}$$

$$f'(x)g(x) = e^{2x} \quad (3) \text{ και } g'(x)f(x) = e^{2x} \quad (4)$$

$$\text{Από (3), (4)} \Rightarrow f'(x)g(x) = g'(x)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))', x \in \mathbb{R}$$

Άρα $\ln f(x) = \ln g(x) + c, x \in \mathbb{R}$

$$(1) \xrightarrow{x=0} f(0) = 1$$

$$(2) \xrightarrow{x=0} g(0) = 1$$

$$\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

δηλαδή $\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta 2. \text{ Είναι } f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \stackrel{g(x)=f(x)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (e^{2x})' \quad x \in \mathbb{R} \text{ άρα } f^2(x) = e^{2x} + \kappa, x \in \mathbb{R}$$

$$f^2(0) = 1 + \kappa \Leftrightarrow 1 = 1 + \kappa \Leftrightarrow \underline{\kappa = 0}$$

$$\text{δηλαδή } f^2(x) = e^{2x} \stackrel{f(0)}{\Leftrightarrow} f(x) = (e^{2x})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta 3. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{u = -\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{-u} \stackrel{L'H}{=} - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = -\infty$$

$$\Delta 4. \text{ Είναι } F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt \text{ άρα } F'(x) = e^{x^2} > 0 \text{ οπότε } F \uparrow \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x \leq 1 \Leftrightarrow F(x) \leq F(1) \Leftrightarrow \underline{F(x) \leq 0}$$

$$E = \int_0^1 |F(x)| dx = - \int_0^1 F(x) dx = \int_1^0 F(x) dx = \int_1^0 (x)' F(x) dx =$$

$$[xF(x)]_1^0 - \int_1^0 xF'(x) dx = -F(1) - \int_1^0 xe^{x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{x^2}]_1^0 = -\frac{1}{2} (1-e) = \frac{e-1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα κρίνονται (αρκούντως) απαιτητικά σε σύγκριση με τα θέματα των προηγούμενων ετών. Οι υποψήφιοι ίσως πιεστούν χρονικά λόγω του πλήθους των αλγεβρικών πράξεων. Για την αντιμετώπιση των θεμάτων χρειάζεται πολύ καλή αφομοίωση της ύλης και ανάπτυξη σε μεγάλο βαθμό της συνθετικής και κριτικής ικανότητας των υποψηφίων. Συνέπεια των παραπάνω προβλέπεται μείωση των υψηλών βαθμολογιών σε σχέση με τα προηγούμενα έτη.