ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2013

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Δευτέρα, 27 Μαΐου 2013
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho>0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σελ. 334-335 (Σχολ. Βιβλίο)

Α2. Σελ. 246 (Σχολ. Βιβλίο)

Α3. Σελ. 222 (Σχολ. Βιβλίο)

Α4. α) Λ
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$

(μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$

(μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in R$, και

$$\left|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)\right| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0$$

να αποδείξετε ότι:

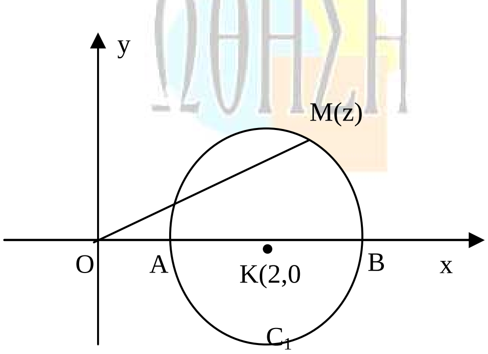
$$|\nu| < 4$$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}|z-2|^2+|z-2|=2\\ |z-2|=\omega>0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\omega^2+\omega-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=1\\ \text{ή}\\ \omega=-2, \text{απορ.}\end{cases} \Leftrightarrow \omega=1 \Leftrightarrow |z-2|=1$, άρα ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος C_1 κέντρου Κ(2,0) και ακτίνας ρ=1.



Έστω M(z) και η OK τέμνει τον C_1 στα σημεία Α,Β ισχύουν:

$(OA)\le(OM)\le(OB) \Leftrightarrow (OK)-\rho\le|z|\le(OK)+\rho \Leftrightarrow$

$2-1\le|z|\le2+1 \Leftrightarrow 1\le|z|\le3$.

Άρα, $|z|\le3$.

2ος τρόπος

Έχουμε $|z-2|=1$, όμως $||z|-|2||\le|z-2| \Leftrightarrow ||z|-|2||\le 1 \Leftrightarrow$

$-1\le |z|-2\le 1 \Leftrightarrow -1+2\le|z|\le 3 \Leftrightarrow 1\le|z|\le 3$ άρα $|z|\le 3$

B2. Αφού z_1,z_2 ρίζες της $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$, $\beta,\gamma\in R$ είναι $z_2=\overline{z_1}$ και από Vietta ισχύουν $z_1+z_2=-\beta$ (1), $z_1z_2=\gamma$ (2)

Έχουμε ακόμη ότι: $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z_1)-(-\mathrm{Im}(z_1))|=2 \Leftrightarrow$

$|2\,\mathrm{Im}(z_1)|=2 \Leftrightarrow |\mathrm{Im}(z_1)|=1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1)=\pm 1$.

Έχουμε $N(z_1)\in C_1 \Leftrightarrow |z_1-2|=1 \Leftrightarrow |(\mathrm{Re}(z_1)-2)+\mathrm{Im}(z_1)i|=1 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z_1)-2)^2+(\mathrm{Im}(z_1))^2=1 \Leftrightarrow$

$(\mathrm{Re}(z_1)-2)^2+(\pm 1)^2=1 \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z_1)-2)^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=2$.

Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$ ή $z_1=2-i$ και $z_2=2+i$.

Η $(1) \Leftrightarrow 4=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$(2) \Leftrightarrow 2^2+1^2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

B3. $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_o=0 \Leftrightarrow -\nu^3=\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_o$ άρα

$|\nu|^3=|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_o|\le|\alpha_2\nu^2|+|\alpha_1\nu|+|\alpha_o|\le 3|\nu|^2+3|\nu|+3$,

άρα $|\nu|^3\le 3(|\nu|^2+|\nu|+1) \Leftrightarrow |\nu|^3-1\le 3(|\nu|^2+|\nu|+1)-1 \Leftrightarrow$

$(|\nu|-1)(|\nu|^2+|\nu|+1)\le 3(|\nu|^2+|\nu|+1)-1 \Leftrightarrow |\nu|-1\le 3-\dfrac{1}{|\nu|^2+|\nu|+1} \Leftrightarrow$

$|\nu|\le 4-\dfrac{1}{|\nu|^2+|\nu|+1}<4$

Άλλος τρόπος:

Είναι $\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_o$, οπότε $|\nu|^3=|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0|\le|\alpha_2|\cdot|\nu|^2+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|$

Επειδή, $|\alpha_2|\le 3$, $|\alpha_1|\le 3$, $|\alpha_0|\le 3$,

ισχύει $|\alpha_2|\cdot|\nu|^2+|\alpha_1|\cdot|\nu|+|\alpha_0|\le 3\cdot|\nu|^2+3\cdot|\nu|+3$, άρα $|\nu|^3\le 3\cdot|\nu|^2+3\cdot|\nu|+3$ (1)

Αν $|\nu|\ge 4$, τότε $|\nu|^3\ge 4\cdot|\nu|^2$, άρα $|\nu|^3\ge 3\cdot|\nu|^2+|\nu|^2$

επίσης $|\nu|^2\ge 4\cdot|\nu| \Rightarrow 3|\nu|^2+|\nu|^2\ge 3|\nu|^2+4|\nu|$, άρα $|\nu|^3\ge 3\cdot|\nu|^2+3|\nu|+|\nu|$

επειδή, $|\nu|\ge 4$ ισχύει $3|\nu|^2+3|\nu|+|\nu|\ge 3|\nu|^2+3|\nu|+4$

άρα $|\nu|^3\ge 3\cdot|\nu|^2+3|\nu|+4>3\cdot|\nu|^2+3|\nu|+3$,

οπότε αφού ισχύει $|\nu|^3\le 3\cdot|\nu|^2+3|\nu|+3$, αναγκαία $\nu<4$

Άλλος τρόπος:

$\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_o=0$ (1)

Αν $\nu=0$ τότε $\alpha_o=0$, άτοπο άρα $\nu\ne 0$

$(1) \overset{\div\nu^2}{\Leftrightarrow} \nu+\alpha_2+\dfrac{\alpha_1}{\nu}+\dfrac{\alpha_0}{\nu^2}=0 \Rightarrow \nu=-\dfrac{\alpha_1}{\nu}-\dfrac{\alpha_0}{\nu^2}-\alpha_2$

$$|\nu|=\left|-\frac{\alpha_1}{\nu}-\frac{\alpha_0}{\nu^2}-\alpha_2\right|\leq\frac{3}{|\nu|}+\frac{3}{|\nu|^2}+3 \qquad (2)$$

Επειδή, $|\alpha_2|\leq 3,\quad |\alpha_1|\leq 3,\quad |\alpha_0|\leq 3,$

Έστω $|\nu|\geq 4\Leftrightarrow\frac{1}{|\nu|}\leq\frac{1}{4}$. Είναι $\frac{3}{|\nu|}+\frac{3}{|\nu|^2}+3\leq\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+3=\frac{63}{16}<4 \quad (3)$

Από (2),(3): $|\nu|<4$, ατόπο, άρα $|\nu|<4$.

<u>Άλλος τρόπος:</u>

Είναι $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_o=0\Leftrightarrow\nu^3=-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_o\Leftrightarrow$

$|\nu^3|=|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_o|\leq|-\alpha_2||\nu^2|+|\alpha_1||\nu|+|\alpha_o|\leq 3|\nu^2|+3|\nu|+3$ άρα

$|\nu^3|-3|\nu^2|-3|\nu|-3\leq 0$ θέτω $|\nu|=\omega\geq 0$,

$\omega^3-3\omega^2-3\omega-3\leq 0$

1	–3	–3	–3	4
	4	4	4	
1	1	1	1	

$(\omega-4)\cdot(\omega^2+\omega+1)+1\leq 0\Leftrightarrow(\omega-4)\cdot(\omega^2+\omega+1)\leq -1<0$, $\Delta>0$ άρα $\omega=|\nu|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g :R→R, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$, για κάθε $x\in R$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \quad ,x\in R$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x))=1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)\,dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_o$$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x$, $x\in R$

Θέτουμε: $w(x)=f(x)+x$, $x\in R$

$w'(x)=f'(x)+1,\ x\in R$

Ισχύει, $w(x)\cdot w'(x)=x \Rightarrow 2w(x)\cdot w'(x)=2x \Rightarrow (w^2(x))'=(x^2)'$, $x\in R$

Άρα, $w^2(x)=x^2+c$, $x\in R$

$w^2(0)=c \Rightarrow f^2(0)=c \Rightarrow \boxed{c=1}$

Άρα, $w^2(x)=x^2+1$, $x\in R$.

$w^2(x)=x^2+1\neq 0$ για κάθε $x\in R$, άρα $w(x)\neq 0$, $x\in R$ και επειδή $w(x)=f(x)+x$ συνεχής στο R η w θα έχει σταθερό πρόσημο στο R.

$w(0)=f(0)=1>0$, οπότε $w(x)>0$, $x\in R$

Άρα, $w(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in R \Rightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in R$

Γ2. Ισχύει: $x^2+1>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow f(x)>0$, $x\in R$

Είναι, $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Άρα $f'(x)<0$, $x\in R \Rightarrow f$ γν.φθίνουσα στο R, οπότε η f είναι "1–1" στο R.

Είναι $f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0) \overset{f:\,1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0$

Θέτουμε: $h(x)=2x^3+3x^2-2$, $x\in R$

$h'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−	+
h	↗		↘	↗

$A=(-\infty,-1]$

$h(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\ h(-1)]=(-\infty,-1]$, άρα $h(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(-\infty,-1]$

άρα η $h(x)$ δεν έχει ρίζα στο A.

$B=[-1,0]$

$h(B)=[h(0),\ h(-1)]=[-2,-1]$, άρα $h(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[-2,-1]$

άρα η $h(x)$ δεν έχει ρίζα στο B.

$\Gamma=[0,+\infty)$

$h(\Gamma)=[h(0),\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x))=[-2,+\infty)$, άρα επειδή το $0\in[-2,+\infty)$ θα υπάρχει $x_1\in[0,+\infty)$ ώστε $h(x_1)=0$, άρα έχει μοναδική ρίζα στο Γ.

Άρα, τελικά η $h(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο R.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=\displaystyle\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x$, ένα $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Η w είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$w(0)=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt > 0$, γιατί $f(t) > 0$ και $-\frac{\pi}{4} < 0$

$w\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0)\cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -f(0) < 0$

$w(0)\cdot w\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $w(x_0) = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x)=\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt,\ x\in(1, +\infty)\ \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$. (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1)\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $x_0=1$ οπότε $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$ επειδή $f(1)=1$ θα έχουμε $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = f'(1)$ Ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0$ άρα

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-1+1-f(1-h)}{h}=0$ άρα

$\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+5h)-1}{h}-\dfrac{f(1-h)-1}{h}\right]=0$ άρα $\lim\limits_{h\to 0}\left[5\dfrac{f(1+5h)-1}{5h}+\dfrac{f(1-h)-1}{-h}\right]=0$ (2)

Τώρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-1}{5h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=5h}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-1}{u}=f'(1)$ λόγω (1) και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-1}{-h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=-h}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+u)-1}{u}$=f′(1) λόγω (1) άρα από (2) έχουμε 5f′(1)+f′(1)=0 ⇔ 6f′(1)=0 ⇔ f′(1)=0.

Επειδή f′ είναι γνήσια αύξουσα για x<1 θα είναι f′(x)<f′(1) δηλαδή f′(x)<0 άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (–∞, 1] και για x>1 θα είναι f′(x)>f′(1) δηλαδή f′(x)>0 άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο [1, +∞). Οπότε στο x_o=1 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο f(1)=1.

Δ2. Είναι g(x)=$\displaystyle\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt$, x∈(1, +∞) και α>1 και επειδή $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο (1, +∞) είναι παραγωγίσιμη x∈(1, +∞) με g′(x)= $\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ και επειδή από ($Δ_1$) f(x)>1 και x>1 είναι g′(x)>0 , x∈(1, +∞) άρα g γνήσια αύξουσα στο (1, +∞).

Θέλουμε $\displaystyle\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du$

Θεωρούμε φ(x)= $\displaystyle\int_{x}^{x+1}g(t)dt$, x>1.

φ(x)=$\displaystyle\int_{x}^{2}g(t)dt+\int_{2}^{x+1}g(t)dt=-\int_{2}^{x}g(t)dt+\int_{2}^{x+1}g(t)dt$

φ′(x)=–g(x)+g(x+1)=g(x+1)–g(x)>0 γιατί x+1>x και g είναι γνήσια αύξουσα. Άρα η φ είναι γνήσια αύξουσα για x>1 και η δοσμένη ανίσωση γράφεται

$$\varphi(8x^2+5)>\varphi(2x^4+5)$$

και επειδή φ είναι γνήσια αύξουσα θα έχουμε ισοδύναμα $8x^2+5>2x^4+5$ ⇔ $8x^2>2x^4$ ⇔ $8x^2-2x^4>0$ ⇔ $2x^2(4-x^2)>0$ και επειδή $x^2>0$ έχουμε $4-x^2>0$ ⇔ $x^2<4$ ⇔ $|x|<2$ ⇔ –2<x<2 εκτός από x=0 που ισχύει η ισότητα.

Δ3. Είναι g′(x)= $\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ από ($Δ_1$) και επειδή είναι πηλίκο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη με g′′(x)=$\dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$

Η f στο [1, x] με x>1 είναι παραγωγίσιμη άρα σύμφωνα με το Θ. Μ. Τ. ξ∈(1, x) ώστε f′(ξ)=$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ⇔ (x–1)f′(ξ)=f(x)–1 οπότε

$g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$ επειδή ξ<x και f′ γν. αύξουσα f′(ξ)<f′(x) άρα f′(x)–f′(ξ)>0 οπότε g′′(x)>0 για x>1 που σημαίνει ότι η g είναι κυρτή στο (1, +∞).

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την x=α και η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα, αφού α>1 $\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$ ή $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$ (1)

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο (α, g(α)) ή (α, 0) είναι $\psi-g(\alpha)=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$ ή $\psi= g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$ και επειδή είναι κυρτή η g τα σημεία της C_g θα είναι όλα πάνω από τη C_g εκτός του σημείου επαφής άρα $g(x)> g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$ οπότε η (1) έχει μοναδική ρίζα x=α.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται απαιτητικά ακόμα για τους πολύ καλά προετοιμασμένους μαθητές. Συγκεκριμένα ο βαθμός δυσκολίας του θέματος Β3 ξεπερνάει το βαθμό δυσκολίας όλων των υπόλοιπων ερωτημάτων.

Τα υπόλοιπα θέματα για να αντιμετωπισθούν πλήρως απαιτούν αυξημένη κριτική και συνθετική ικανότητα από τους υποψηφίους.

Κατά συνέπεια, κρίνουμε ότι θα μειωθεί σημαντικά το ποσοστό των αρίστων.