Πέμπτη, 30 Μαΐου 2002
ΘΕΤΙΚΗ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

Β.1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \text{συν}x .$$

Μονάδες 8

Β.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_o}|f(x)| = 0$ τότε:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$$

Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Μονάδα 1

ε. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδα 1

ΛΥΣΗ

Α. Θεώρία Βλ. σχολικό βιβλίο «*Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης*» σελ. 334-335

Β.1. Θεωρία Βλ. σχολικό βιβλίο «*Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης*» σελ. 224-225

Β.2. Οι απαντήσεις είναι:

α. - Λ

β. - Λ

γ. - Σ

δ. - Σ

ε. - Σ

ΘΕΜΑ 2

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \varrho$ και $\mathrm{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \varrho \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$$

Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3z + i^8z + i^{13}z + i^{18}z =$

$= -iz + z + iz + i^2z = -iz + z + iz - z = 0$

β) $f(13) = i^{13}z = iz = \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\varrho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) =$

$= \varrho[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)]$

γ) Αφού $|z|=2$, $\mathrm{Arg}z=\frac{\pi}{3}$

$$z = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

Άρα εικόνα του z $A(1, \sqrt{3})$

$$f(13) \overset{\beta)}{=} 2(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)) = 2\left(-\eta\mu\frac{\pi}{3} + i\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

Άρα εικόνα του f(13) $B(-\sqrt{3}, 1)$

Αφού f(13)=iz και $|\vec{OA}| = |z| = 2$, $|\vec{OB}| = |iz| = |i||z| = 2$, η εικόνα του f(13) το Β προκύπτει από περιστροφή του Α κατά $\frac{\pi}{2}$, άρα το ΟΑΒ ορθογώνιο στο $\hat{O}$.

άρα εμβαδό: $(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}2 \cdot 2 = 2$

ΣΧΟΛΙΟ: Για την απόδειξη του ΟΑΒ ορθογωνίου μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε ως εξής:

Είναι: $(OA) = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$

$(OB) = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2$

$(AB) = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Παρατηρούμε ότι $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$ αφού $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + 2^2$.

Επομένως $\overset{\triangle}{OAB}$ ορθογώνιο στο $\hat{O}$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΛΥΣΗ

α. Είναι $D_f=D_y=R$ άρα $D_{fog}=R$

με $x_1, x_2 \in R$ και $g(x_1)=g(x_2)$ έχουμε

$f(g(x_1))=f(g(x_2))$ ή

$(fog)(x_1)=(fog)(x_2)$ και επειδή fog "1-1"

$x_1=x_2$

οπότε: g "1-1".

β. Από $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ επειδή g "1-1"

$$f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow$$
$$x^3-x=2x-1 \Leftrightarrow$$
$$x^3-3x+1=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\phi(x)=x^3-3x+1$ $\quad x\in R$

Είναι $\phi'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$\phi'(x)$	+	-	+
ϕ	↗	↘	↗

$\phi(-1)=3$ $\qquad$ $\phi(1)=-1$

Στο $(-\infty, -1]$, η φ γνήσια αύξουσα και συνεχής άρα:
$$\phi((-\infty,-1])=(\lim_{x\to-\infty}\phi(x),\ \phi(-1)]=(-\infty,3]$$

Επίσης στο [0,1] φ γνήσια φθίνουσα και συνεχής άρα:
$$\phi([0,1])=[\phi(1),\phi(0)]=[-1,1]$$

Τέλος στο [1, +∞) φ γνήσια αύξουσα και συνεχής άρα:

$$\phi([1,+\infty)) = \left[\phi(1), \lim_{x\to+\infty}\phi(x)\right) = [-1,+\infty)$$

$0 \in \phi((-\infty,-1])$, άρα έχει μοναδική αρνητική ρίζα στο $(-\infty, -1]$

$0 \in \phi([1,+\infty))$, άρα έχει μοναδική θετική ρίζα στο $[1, +\infty)$

$0 \in \phi([0,1])$, άρα έχει μια θετική ρίζα στο $(0,1) \subseteq (-1,1)$ που είναι και η μοναδική στο (-1,1) επειδή φ γνήσια φθίνουσα στο (-1,1).
Άρα έχει ακριβώς δύο θετικές και μια αρνητική.

ΘΕΜΑ 4

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].
Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx \quad .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:
$f(x) - e^{-f(x)} = x + 1, \ x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

ι) Να εκφραστεί η f ' ως συνάρτηση της f.

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x'x, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) \quad .$$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α. Ισχύει $h(x)-g(x)>0 \ x \in [\alpha,\beta]$
οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα

ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta (h(x)-g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

β. i) Ισχύει $f(x) - e^{-f(x)} = x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$ αφού f παραγωγίσιμη παραγωγίζοντας έχουμε:

$$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$
$$f'(x)\left(1 + e^{-f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow$$
$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$$

ii) $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) \Leftrightarrow$

$\frac{x}{2} < f(x) - f(0) < x f'(x) \Leftrightarrow$ x>0

$\frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x} < f'(x)$ (1)

Είναι $f'(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$ εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο [0,x], για την f υπάρχει $\xi \in (0,x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$$

Είναι $f''(x) = -\frac{\left(1 + e^{-f(x)}\right)'}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} = \frac{f'(x)e^{-f(x)}}{\left(1 + e^{-f(x)}\right)^2} > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

Άρα f′ γνήσια αύξουσα στο R και επειδή

0<ξ<x θα ισχύει $f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$

iii) Ισχύει $f(x) > \frac{x}{2} > 0$ για κάθε x>0, επίσης f(0)=0

Άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ οπότε $E = \int_0^1 f(x)dx$.

Από $f(x) \geq \frac{x}{2}$ $x \in [0,1]$ έχουμε: $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 \frac{x}{2}dx$

γιατί η $f(x) - \frac{x}{2}$ δεν είναι παντού μηδέν στο [0,1].

Οπότε: $E > \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \Leftrightarrow E > \frac{1}{4}$.

Ακόμη $f(x) \leq xf'(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Άρα: $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx$

γιατί $f(x) - xf'(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο [0,1].

Οπότε: $E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{f(1)}{2}$$

Άρα τελικά: $\frac{1}{4} < E < \frac{f(1)}{2}$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα ήταν αυξημένης δυσκολίας και απαιτούσαν από τους εξεταζόμενους κριτική και ειδικότερα συνθετική ικανότητα καθώς και δυνατότητα αυτενέργειας. Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους ήταν η μη κλιμακούμενη διαβάθμιση δυσκολίας, γεγονός που πιθανόν να δημιουργήσει προβλήματα στους μαθητές που έχουν ως στόχο την προαγωγή τους.