Πέμπτη, 29 Μαΐου 2003
ΘΕΤΙΚΗ και ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. **Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.**

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρία Σχολικού Βιβλίου Σελ. 217

Β. **Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;**

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρία Σχολικού Σελ. 247

Γ. ***Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.***

α. **Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει**

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| .$$

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΣΩΣΤΟ

β. **Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.**

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΣΩΣΤΟ

γ. **Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει**

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \ , \ c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΣΩΣΤΟ

δ. **Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.**

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΛΑΘΟΣ

ε. **Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.**

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. **Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$**
$Im(w)=3\beta-\alpha$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

2α.
$$w=3z-i\bar{z}+4=$$
$$3(\alpha+\beta i)-i(\alpha-\beta i)+4=$$
$$3\alpha+3\beta i-\alpha i-\beta+4=$$
$$(3\alpha-\beta+4)+(3\beta-\alpha)i$$
άρα
$$Re(w)=3\alpha-\beta+4$$
$$Im(w)=3\beta-\alpha$$

β. **Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.**

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

2β. Έχουμε ότι $M(w)\in E: y=x-12 \Leftrightarrow$
$$3\beta-\alpha=3\alpha-\beta+4-12 \Leftrightarrow$$
$$4\beta=4\alpha-8 \Leftrightarrow$$
$$\beta=\alpha-2.$$

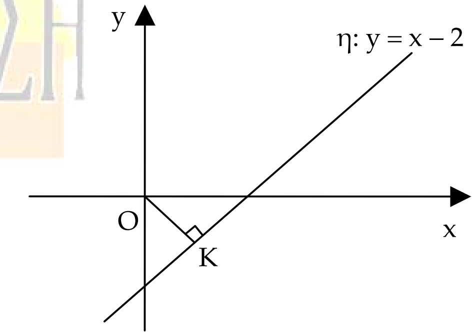
Άρα τα σημεία $N(z)\in \eta: y=x-2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

2γ.



- Φέρνουμε $OK \perp \eta : y = x - 2$, τότε $\lambda_{OK} = -1$, άρα OK: $y = -x$
- K: $\begin{cases} OK : y = -x \\ \eta : y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = -1 \end{cases}$, άρα K(1, −1)

Συνεπώς ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z_1 = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

3α. Είναι $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, $x \in R$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε «1-1», άρα αντιστρέφεται. Είναι:

$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		−	0	+	
f		∩		∪	

Όπως φαίνεται από τον πίνακα μεταβολών της f'' η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$ και έχει (Σ.Κ.) στο σημείο (0, 0).

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

3β. $f(e^x) \geq f(1+x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} e^x \geq 1 + x,\ x \in R$.

Θεωρούμε $g(x) = e^x - x - 1,\ x \in R$

$g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα ισχύει:

$$g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e^x \geq 1 + x}$$

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

3γ. Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο O(0, 0) είναι η

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \text{ή} \quad y = x,$$

η οποία είναι άξονας συμμετρίας δύο αντίστροφων συναρτήσεων.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

3δ. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Βρίσκουμε τις ρίζες της f^{-1} και έχουμε:

$$f^{-1}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = f(0) = 0\,,$$

άρα η μονάδική ρίζα της f^{-1} είναι η $x = 0$.

Άρα για $x \geq 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) = 0$

Οπότε $E = \int_0^3 f^{-1}(x)dx$

Θέτουμε $x = f(u)$

$dx = f'(u)du.$

Για $x = 0$: $0 = f(u) \Leftrightarrow u = 0$

Για $x = 3$: $3 = f(u) \Leftrightarrow u = 1$

Η μοναδικότητα της ρίζας εξασφαλίζεται από το ότι η f είναι «1 – 1».

Άρα $E = \int_0^1 f^{-1}(f(u)) f'(u)du = \int_0^1 uf'(u)du =$

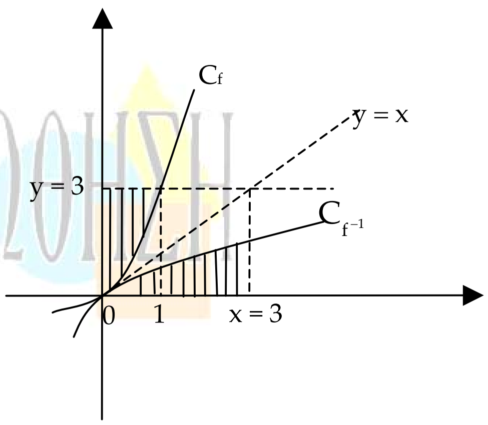
$$= \int_0^1 xf'(x)dx = \int_0^1 (5x^5 + 3x^3 + x)dx =$$

$$= \left[5\frac{x^6}{6} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{10+9+6}{12} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

Δεύτερη λύση

κάνοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση των f και f^{-1} έχουμε



Φέρνοντας την $y = 3$ το εμβαδόν που ορίζεται από $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $x = 3$ είναι ίσο με το εμβαδόν που ορίζεται από C_f, $y'y$ και την $y = 3$ λόγω συμμετρίας ως προς την $y = x$.

Έτσι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^5 + x^3 + x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ προφανής ρίζα μοναδική λόγω του ότι f είναι «1-1»

Οπότε $E(\Omega) = \int_0^1 (3 - f(x))\,dx = \int_0^1 3dx - \int_0^1 (x^5 + x^3 + x)\,dx =$

$$= 3[x]_0^1 - \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{11}{12} = \frac{36-11}{12} = \frac{25}{12}$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

4α. Επειδή $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$ $\gamma \neq \delta$ γιατί αν $\gamma = \delta$ τότε

$f(\gamma) = f(\delta)$ και $f(\gamma)\cdot f(\delta) = (f(\gamma))^2 > 0$ άτοπο γιατί $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$

Άρα, έστω $\gamma < \delta$ χωρίς βλάβη της γενικότητας και αφού $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$ η f συνεχής από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o \in (\gamma, \delta)$ ώστε $f(x_o) = 0$.

β. Υπάρχουν σημεία ξ_1, ξ_2 ∈ (α,β) τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

4β.

1ος τρόπος

Στα διαστήματα $[\alpha, x_o]$ και $[x_o, \beta]$ η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν

$f(\alpha) = f(x_o) = f(\beta) = 0$ άρα από Θ. Rolle υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_o)$ και $x_2 \in (x_o, \beta)$

ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$.

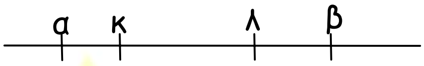
Τώρα αν $f''(x) = 0$ $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f'(x) = \kappa$ $x \in [\alpha, \beta]$ και επειδή $f'(x_1) = 0$ $\kappa = 0$

δηλαδή $f'(x) = 0$ άρα $f(x) = \lambda$ για $x \in [\alpha, \beta]$ δηλαδή $f(\gamma)\cdot f(\delta) = \lambda^2 > 0$ άτοπο

επομένως η f'' δεν είναι παντού μηδέν.

Αν η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β) τότε η f' γνήσια μονότονη οπότε η f' θα έχει το πολύ μια ρίζα στο (α, β) άτοπο αφού f' από παραπάνω έχει δύο ρίζες. Επομένως, επειδή f'' συνεχής θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

2ος τρόπος



Επειδή η f στο [α, β] δεν είναι σταθερή αφού αν f σταθερή στο [α, β] και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και f συνεχής θα ισχύει $f(x) = 0$ $x \in (\alpha, \beta)$ άτοπο αφού $f(\gamma)f(\delta) < 0$ σύμφωνα με Θ.Μ.Ε.Τ. υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\kappa) \leq f(x) \leq f(\lambda)$ και επειδή η f έχει ετερόσημες τιμές στο (α,β) η μικρότερη τιμή $f(\kappa) < 0$ και η μεγαλύτερη τιμή $f(\lambda) > 0$. Τώρα στο [α, κ] η f παραγωγίσιμη οπότε σύμφωνα με Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\varrho_1 \in (\alpha, \kappa)$ ώστε

$$f'(\varrho_1) = \frac{f(\kappa) - f(\alpha)}{\kappa - \alpha} = \frac{f(\kappa)}{\kappa - \alpha} > 0$$

Στο διάστημα τώρα $[\varrho_1, \kappa]$ η f' παραγωγίσιμη με $f'(\kappa) = 0$ από Fermat, υπάρχει από Θ.Μ.Τ. $\xi_1 \in (\varrho_1, \kappa)$ ώστε $f''(\xi_1) = \dfrac{f'(\kappa) - f'(\varrho_1)}{\kappa - \varrho_1} = -\dfrac{f'(\varrho_1)}{\kappa - \varrho_1} < 0$

Επίσης, στο [λ, β] από Θ.Μ.Τ. για την f έχουμε ότι

υπάρχει $\rho_2 \in (\lambda, \beta)$ ώστε $f'(\rho_2) = \dfrac{f(\beta) - f(\lambda)}{\beta - \lambda} = -\dfrac{f(\lambda)}{\beta - \lambda} > 0$ αφού $f(\lambda) < 0$

και στο $[\lambda, \rho_2]$ από Θ.Μ.Τ. για την f' έχουμε ότι

υπάρχει $\xi_2 \in (\lambda, \rho_2)$ ώστε $f''(\xi_2) = \dfrac{f'(\rho_2) - f'(\lambda)}{\rho_2 - \lambda} = \dfrac{f'(\rho_2)}{\rho_2 - \lambda} > 0$ αφού $f'(\lambda) = 0$ από Fermat.

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

4γ. Σύμφωνα με τα δεδομένα του θέματος και των θεωρητικών δεδομένων της σχολικής ύλης για τον ορισμό του σημείου καμπής (... αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_o και $f''(x_o) = 0$ ...) η ύπαρξη τουλάχιστον ενός σημείου καμπής δεν αποδεικνύεται. Η ύπαρξη πιθανής θέσης σημείου καμπής (που βαθμολογήθηκε με όλες τις μονάδες) αποδεικνύεται ως εξής:

Επειδή f'' συνεχής στο διάστημα που ορίζουν τα σημεία ξ_1 και ξ_2 του β) ερωτήματος και $f''(\xi_1)f''(\xi_2) < 0$ σύμφωνα με Θ. Bolzano υπάρχει ξ ώστε $f''(\xi) = 0$ δηλαδή το $(\xi, f(\xi))$ είναι πιθανό σημείο καμπής.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

α. Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές

β. Τα σημερινά θέματα ήταν ιδιαίτερα απαιτητικά και ήθελαν πέρα από την εμβάθυνση της σχολικής ύλης, ξεχωριστή ικανότητα για την αντιμετώπιση κάποιων ερωτημάτων. Θεωρούμε ότι οι βαθμολογίες στο συγκεκριμένο μάθημα θα κυμανθούν σε χαμηλότερα επίπεδα από πέρυσι.