Τρίτη, 31 Μαΐου 2005
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$.

Μονάδες 9

Α.2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο στο x_o, τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280
Β. **α.** Λ
β. Λ
γ. Σ
δ. Σ
ε. Λ
στ. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι : $\bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$

Ομοίως $\bar{z}_2 = \dfrac{9}{z_2}$ και $\bar{z}_3 = \dfrac{9}{z_3}$.

β. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right) - \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \quad (1)$$

Είναι $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \overset{(\alpha)}{=} \dfrac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \dfrac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_2}$

οπότε η (1) ισχύει.

γ. $|z_1+z_2+z_3| = |\overline{z_1+z_2+z_3}| = |\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}| = \left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right| = 9\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| =$

$= 9\cdot\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right| = 9\cdot\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|}{|z_1||z_2||z_3|} = 9\cdot\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|}{3\cdot3\cdot3} =$

$= \frac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $\psi=\lambda ex$.
Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f(x) = e^{\lambda x}$, $D_f = R$

α. Είναι $f'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda\cdot e^{\lambda x} > 0$, $x\in R$ άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

β. Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής
τότε $y_1 = f(x_1) = e^{\lambda x_1}$ και $f'(x_1) = \lambda e^{\lambda x_1}$
οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι
ε: $y - f(x_1) = \lambda e^{\lambda x_1}(x - x_1)$
Το $O(0, 0)\in\varepsilon$ οπότε θα ισχύει $0 - e^{\lambda x_1} = \lambda e^{\lambda x_1}(0 - x_1)$
$1 = \lambda x_1 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{1}{\lambda}$
άρα $y_1 = e^{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}} = e$
άρα $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$
Επομένως η εφαπτομένη γίνεται

$\varepsilon: y - e = \lambda e\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)$

$\varepsilon: y - e = \lambda e x - e$

$\varepsilon: y = \lambda e x$

γ. Είναι $f''(x) = \left(\lambda e^{\lambda x}\right)' = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ άρα f κυρτή
οπότε C_f πάνω από την εφαπτομένη (ε)
άρα $f(x) - \lambda e x \geq 0$ (1)

οπότε $E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(x) - \lambda e x| dx \overset{(1)}{=} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda e x) dx =$

$= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(e^{\lambda x} - \lambda e x\right) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x} dx - \lambda e \int_0^{\frac{1}{\lambda}} x dx =$

$= \frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \lambda e \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}(e-1) - \lambda e\left(\frac{1}{2\lambda^2} - 0\right) =$

$= \frac{1}{\lambda} e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e}{2\lambda} - \frac{2}{2\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$

δ. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{e\lambda - 2\lambda}{4 + 2\eta\mu\lambda} \overset{\lambda>0}{=} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{e-2}{\frac{4}{\lambda} + \frac{2\eta\mu\lambda}{\lambda}} = \frac{e-2}{2} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} = L$

Ισχύει $\left|\frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right| = \frac{|\eta\mu\lambda|}{|\lambda|} \leq \frac{1}{\lambda}$, αφού $|\eta\mu\lambda| \leq 1$, $\lambda>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$. Επίσης $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{2}{\lambda} = 0$

Επειδή τώρα $\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} = \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$, γιατί $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1$ και $\lambda>0$

και $\lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right) = 0$, άρα $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$,

επιπλέον έχουμε $e>2 \Leftrightarrow e-2>0$, επομένως το $L=+\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση
$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=0$.

α. Να δειχθεί ότι : $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις: $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)dt=\dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0,1)

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Από $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ έχουμε $2f'(x)=\dfrac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)}=e^x \Leftrightarrow (2e^{f(x)})'=(e^x)'$, $x\in R$ άρα

$2e^{f(x)}=e^x+c$ επειδή $f(0)=0$ έχουμε $2e^{f(0)}=e^0+c \Leftrightarrow c=1$.

Άρα $2e^{f(x)}=e^x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^x+1}{2}$ και αφού $\dfrac{e^x+1}{2}>0$, $x\in R$, έχουμε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

β. Έχουμε $\int_0^x f(x-t)dt$, οπότε θέτοντας $u=x-t$ έχουμε $du=-dt \Leftrightarrow dt=-du$

και νέα άκρα

t	u
x	0
0	x

οπότε ισοδύναμα έχουμε

$\int_x^0 f(u)(-du)=-\int_x^0 f(u)du=\int_0^x f(t)dt$.

Η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R αφού η f είναι συνεχής στο R οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=f(0)=0.$$

γ. Έχουμε $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)dt$ και $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Η $t^{2005}f(t)$ συνεχής στο R οπότε επιλέγοντας $0\in R$, έχουμε

$h(x)=\int_{-x}^{0} t^{2005}f(t)dt+\int_0^x t^{2005}f(t)dt=-\int_0^{-x} t^{2005}f(t)dt+\int_0^x t^{2005}f(t)dt$, δηλαδή

$h(x)=-\int_0^{-x} t^{2005}f(t)dt+\int_0^x t^{2005}f(t)dt$ που είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x)=-(-x)^{2005}f(-x)(-x)'+x^{2005}f(x)=-x^{2005}f(-x)+x^{2005}f(x)=x^{2005}(f(x)-f(-x))=$

$=x^{2005}\left(\ln\frac{1+e^{x}}{2}-\ln\frac{1+e^{-x}}{2}\right)=x^{2005}\ln\dfrac{\frac{1+e^{x}}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}=x^{2005}\ln\frac{1+e^{x}}{1+e^{-x}}=x^{2005}\ln\left(\dfrac{1+e^{x}}{1+\frac{1}{e^{x}}}\right)=$

$=x^{2005}\ln\left(\frac{e^{x}(1+e^{x})}{1+e^{x}}\right)=x^{2005}\ln e^{x}=x^{2005}\cdot x=x^{2006}$.

Επίσης g παραγωγίσιμη με $g'(x)=x^{2006}$, οπότε $h'(x)=g'(x)$, $x\in R$

Οπότε $h(x)=g(x)+c$.

Αφού $h(0)=0$ και $g(0)=0$ έχουμε ότι

$h(0)=g(0)+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $h(x)=g(x)$.

δ. Η εξίσωση λόγω του (γ) γράφεται ισοδύναμα:

$\frac{x^{2007}}{2007}=\frac{1}{2008}\Leftrightarrow 2008x^{2007}-2007=0.$

Θεωρώντας $\phi(x)=2008x^{2007}-2007$ που είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Έχουμε $\phi(0)=-2007<0$ και $\phi(1)=2008-2007=1>0$,

άρα $\phi(0)\phi(1)<0$ οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε $\phi(x_o)=0$, δηλαδή η εξίσωση $\phi(x)=0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα .

Επειδή $\phi'(x)=2008\cdot2007x^{2006}>0$, $x\in(0,1)$, η ϕ είναι γνήσια αύξουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

α) Τα σημερινά θέματα καλύπτουν ευρύ φάσμα της ύλης και διακρίνονται για τη σαφήνεια των ζητουμένων τους. Απαιτούσαν από τους υποψήφιους εκτός από την καλή αναπαραγωγή της διδαχθείσας ύλης, συνθετική και κριτική ικανότητα για την αντιμετώπιση αρκετών ερωτημάτων.

Χαρακτηριστικό των θεμάτων είναι ότι παρατηρείται διαφορά επιπέδου δυσκολίας μεταξύ τους χωρίς αυτή να είναι κλιμακούμενη.

β) Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.