ΩΘΗΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

εξετάσεις 2012

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της Ώθησης

Δευτέρα, 28 Μαΐου 2012
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό***, *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος***, *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

δ) $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in R-\{x/\eta\mu x=0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f′, g′ είναι συνεχείς συναρτήσει στο [α, β].

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 191

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 258

Α4. **α) Σ** **β) Σ** **γ) Λ** **δ) Λ** **ε) Λ**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$$

$$|w-5\overline{w}|=12 \quad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1\le|z-w|\le4$$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

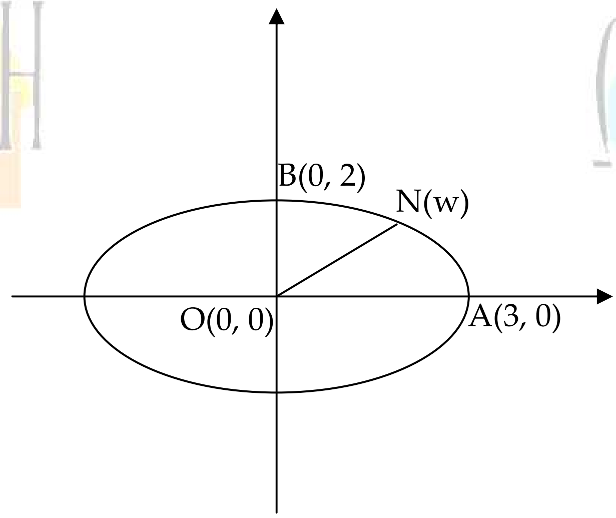
Β1. Έστω $z=x+yi$, $x,y\in R$ τότε

$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2+|(x+1)+y|^2=4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2=4$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$. Άρα ο γ.τ των εικόνων M(z) είναι ο κύκλος C_1 με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β2. Έχουμε $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2 \Leftrightarrow |z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+|z_2|^2=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=0$ (1)
$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1})+|z_2|^2\overset{(1)}{=}$
$=|z_1|^2+|z_2|^2=2$. Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

Β3. $\begin{cases}|w-5\overline{w}|=12\\ w=x+yi\end{cases} \Leftrightarrow |x+yi-5x+5yi|=1 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow |2x-3yi|=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x)^2+(-3y)^2}=6 \Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Άρα ο γ.τ των N(w) είναι η έλλειψη C_2 με εξίσωση $C_2: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.



Ισχύει: $(OB) \le (ON) \le (OA) \Leftrightarrow 2 \le |w| \le 3$. Άρα $|w|_{max}=3$, $|w|_{min}=2$.

Β4. Έχουμε: $|z-w| \le |z|+|w| \le |z|+|w|_{max}=1+3=4$ (1)

$\begin{cases} |w| \ge |w|_{min} \Leftrightarrow |w| \ge 2 \\ |z|=1 \end{cases}$, άρα $|w|-|z| \ge 1$ και $||w|-|z|| \ge 1$ (2)

Από (1), (2) έχουμε $1 \le |z-w| \le 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα xx′ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$, $x>0$ άρα f' γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $f'(1)=0$

άρα η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική.

$0<x<1 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1)=0$

$x>1 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1)=0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0	$+$
f		↘	↗

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$ και η f είναι γν. Αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[(x-1)\ln x-1]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}[(x-1)\ln x-1]=+\infty$

Είναι $f(\Delta_1)\underset{f\text{ γν.φθίνουσα}}{\overset{f\text{ συνεχής}}{=}}[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x))=[-1, +\infty)$

$f(\Delta_2)\underset{f\text{ γν.αύξουσα}}{\overset{f\text{ συνεχής}}{=}}[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x))=[-1, +\infty)$

$f((0, +\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1, +\infty)$

Γ2. Είναι $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012 \Leftrightarrow f(x)=2012$

Το 2012 ανήκει στο $[-1, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1\in(0, 1)$ το οποίο είναι μοναδικό γιατί f γν. φθίνουσα ώστε $f(x_1)=2012$ και $x_2\in(1, +\infty)$ το οποίο είναι μοναδικό γιατί f γν. αύξουσα ώστε $f(x_2)=2012$ και επειδή $f(1)=-1\neq 2012$ η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. **1ος τρόπος**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x)=f'(x)+f(x)-2012$, $x\in[x_1, x_2]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

$w(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012 = f'(x_1)<0$ γιατί $x_1<1 \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(1)=0$

$w(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012 = f'(x_2)>0$ γιατί $x_2>1 \Leftrightarrow f'(x_2)>f'(1)=0$

$w(x_1)\cdot w(x_2)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o\in(x_1, x_2)$ ώστε $w(x_o)=0$

2ος τρόπος

Αρκεί η εξίσωση $f'(x)+f(x)-2012=0$ να έχει λύση στο (x_1, x_2)

ή $e^x f'(x)+e^x f(x)-2012e^x=0$

ή $(e^x f(x)-2012e^x)'=0$ (1) να έχει λύση στο (x_1, x_2)

Για αυτό θεωρούμε $g(x)=e^x(f(x)-2012)$, $x\in[x_1, x_2]$ που είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων και είναι $g(x_1)=e^{x_1}(f(x_1)-2012)=0$

$g(x_2)=e^{x_2}(f(x_2)-2012)=0$

οπότε $g(x_1)=g(x_2)$ και σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_o\in(x_1, x_2)$ ώστε $g'(x_o)=0$ άρα η (1) έχει λύση στο (x_1, x_2).

Γ4. Είναι $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x-1+1=(x-1)\ln x$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Για $x>1 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-1>0 \\ \ln x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-1)\ln x>0 \Rightarrow g(x)>0$

$$E=\int_1^e |g(x)|dx=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e \left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=$$

$$\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\displaystyle\ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή (μονάδες 2)

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 4)}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $β>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $ξ\in(β, 2β)$ τέτοιο ώστε:

$$F(β) + F(3β) = 2F(ξ)$$

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Είναι από υπόθεση

$e\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt+x^2-x\geq 0$ για κάθε $x>0$

Θεωρούμε την $g(x)= e\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt+x^2-x$, $x\in(0,+\infty)$

για την οποία ισχύει $g(1)=e\int_1^1 f(t)dt+1-1=0$

άρα $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η g στο σημείο $1\in(0,+\infty)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Τώρα επειδή η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η x^2-x+1 παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων άρα η g παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$g'(x)=ef(x^2-x+1)(x^2-x+1)'+2x-1$

$g'(x)=ef(x^2-x+1)(2x-1)+2x-1$

οπότε από Fermat $g'(1)=0$ δηλαδή

$ef(1)+1=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$

Τώρα αφού η $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και συνεχής θα έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Επίσης από $\ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)|$

Επειδή $f(x)<0$ θα έχουμε

$\ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot(-f(x))$ ή $\ln x-x=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot f(x)$ (1)

Για την συνάρτηση $h(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ αν υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ ώστε $h(x_o)=0$ τότε από (1) $\ln x_o-x_o=0 \Leftrightarrow \ln x_o=x_o$ που είναι άτοπο γιατί ως γνωστόν $\ln x<x$, $x\in(0,+\infty)$.

Άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε $f(x)=\frac{\ln x-x}{h(x)}$ άρα επειδή η $\ln x-x$ παραγωγίσιμη και η $h(x)=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ παραγωγίσιμη αφού η $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, η h παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε η f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Τώρα από (1) έχουμε ισοδύναμα

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ και σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή $\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x$ $x \in (0,+\infty)$

και επειδή για x=1 έχουμε $-\frac{1}{f(1)} = ce$

$-\frac{1}{\frac{-1}{e}} = ce \Leftrightarrow e = ce \Leftrightarrow c = 1$ άρα

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow \ln x - x = e^x = e^x f(x) \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$

Δ2 Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x - x) = -\infty$ άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} [(f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)] \underset{\substack{x \to 0^+ \\ u \to 0}}{\overset{u = \frac{1}{f(x)}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}) =$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{u \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} 0$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Δ3 Επειδή η f(t) συνεχής στο $(0,+\infty)$ η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ και επειδή f παραγωγίσιμη η F′ παραγωγίσιμη

με $F''(x) = f'(x) = \left(\frac{\ln x - x}{e^x}\right)' = \frac{(\ln x - x)'e^x - e^x(\ln x - x)}{e^{2x}} =$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x + x}{e^x} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x}$$

και επειδή $\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow 0 \le x - 1 - \ln x$

και $\frac{1}{x} > 0$ $x \in (0,+\infty)$ άρα $F''(x) > 0$ $x \in (0,+\infty)$

επομένως f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Στην συνέχεια επειδή $x>0$ ισχύει $x<2x<3x$

επομένως στα διαστήματα [x, 2x] [2x, 3x] επειδή F παραγωγίσιμη σύμφωνα με Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1 \in (x,2x)$ $x_2 \in (2x,3x)$ ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \quad F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x}$$

Και επειδή F′ γνήσια αύξουσα και $x_1 < x_2$ θα ισχύει

$F'(x_1) < F'(x_2)$ άρα

$\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$, $x>0$

$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x)$ άρα $2F(2x) < F(3x) + F(x)$

Δ4. Επειδή $F'(x)=f(x)<0$ $x\in(0,+\infty)$ η F είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε $0<\beta<2\beta$ ισχύει $F(\beta)>F(2\beta)$ θα έχουμε $F(\beta)>\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}>F(2\beta)$ γιατί $2F(\beta)>F(\beta)+F(3\beta)\Leftrightarrow$ $F(\beta)>F(3\beta)$ αφού $\beta<3\beta$ και σύμφωνα με το Δ3 ισχύει $F(\beta)+F(3\beta)>2F(2\beta)$ οπότε από το Θ.Ε.Τ υπάρχει $\xi\in(\beta,\ 2\beta)$ ώστε $F(\xi)=\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}$ ή $2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$ που είναι και μοναδικό λόγω μονοτονίας της F.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται για την πλήρη και σαφή διατύπωσή τους, καλύπτοντας το μεγαλύτερο ποσοστό της ύλης. Ειδικότερα:

ΘΕΜΑ Α: θα αντιμετωπισθεί με αρκετή ευκολία από το πλήθος των υποψηφίων.

ΘΕΜΑ Β: η αναφορά στην έλλειψη ίσως ξαφνιάσει στην αρχή τους υποψηφίους αλλά τελικά δε θα έχουν πρόβλημα στην αντιμετώπισή του.

ΘΕΜΑ Γ: χαρακτηρίζεται ως κλασσικό και εύκολα διαχειρίσιμο από το μεγαλύτερο πλήθος των υποψηφίων.

ΘΕΜΑ Δ: ιδιαίτερα απαιτητικό. Γενικά κρίνουμε οι υποψήφιοι θα αντιμετωπίσουν αρκετές δυσκολίες στη διαχείριση όλων των ερωτημάτων.

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω το διαγώνισμα κρίνεται απαιτητικό και υψηλές βαθμολογίες δεν θα επιτυγχάνονται εύκολα.