Τετάρτη, 20 Μαΐου 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 2

γ. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα x΄x είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου σελ. 251

Β. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου σελ. 213

Γ. **α.** Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\,,\ \lambda\in R$$

Α. **α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$.

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2+\overline{w}-12=z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

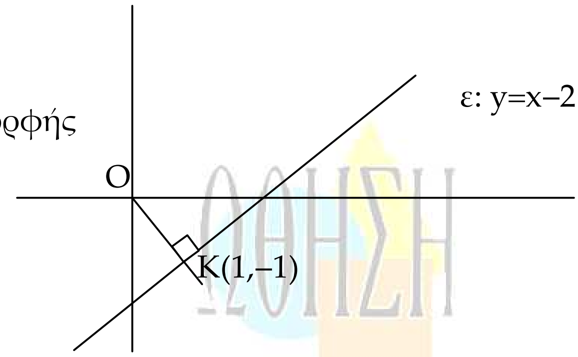
Α. $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\,,\ \lambda\in R$

α. Έστω M(z), $z=x+yi$ τότε $\begin{cases} x=2\lambda+1 \\ y=2\lambda-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda=x-1 \\ y=x-2 \end{cases},\ \lambda\in R$

άρα οι εικόνες των z ανήκουν στην ευθεία ε: $y=x-2$.

β. ε: y=x−2

x	0	2
y	−2	0



Έστω $OK \perp \varepsilon$, όπου (OK) ευθεία της μορφής $y=\lambda x$ και αφού $\lambda_\varepsilon=-1$

τότε $\lambda_{OK}\,\lambda_e=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow$

$\lambda_{OK}=-1$ οπότε (OK): y=−x

$$K:\begin{cases}\varepsilon\ \ : y=x-2\\ OK: y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=-2\\ \ \ y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=1\end{cases}$$

Άρα K(1, −1) συνεπώς ο μιγαδικός $z_0=1-i$ με εικόνα το Κ είναι εκείνος από τους παραπάνω μιγαδικούς με το μικρότερο μέτρο.

B. $|w|^2+\overline{w}-12=z_0 \Leftrightarrow$

$|w|^2+\overline{w}-12=1-i \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$x^2+y^2+x-yi-12=1-i \Leftrightarrow$

$$(x^2+y^2+x-12)-yi=1-i \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+x-12=1\\ -y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1+x-12=1\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-12=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3 \text{ ή } x=-4\\ y=1\end{cases}$$

άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $w_1=3+i$, $w_2=-4+i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1), \qquad x>-1,$$

όπου α>0 και α≠1

A. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι α=e.

Μονάδες 8

B. Για α=e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (−1,0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,+∞).

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Έστω $h(x)=f(x)-1 \Leftrightarrow h(x)=\alpha^x-\ln(x+1)-1$, με $h(0)=0$

Από υπόθεση έχουμε ότι $h(x) \geq 0$ δηλαδή $h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x>-1$

Οπότε η h παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη με

$h'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\dfrac{1}{x+1}$ από Θ.Fermat ισχύει

$h'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha-\dfrac{1}{0+1}=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \ln\alpha=\ln e \Leftrightarrow \alpha=e$

Β. $f(x)=e^x-\ln(x+1)$, $x>-1$

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγισίμων με $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$.

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγισίμων με

$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$, $x>-1$

άρα η f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

β. $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{x+1}$ με προφανής ρίζα το 0 και επειδή η $f''(x)>0$,

η $f'\uparrow$ $(-1,+\infty)$ συνεπώς το 0 μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$.

Για $x>0 \overset{f'\text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $x<0 \overset{f'\text{γν.αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0$

x	−1	0	+∞
f′(x)	−	0	+
f(x)	↘	f(0)=1 Ο.Ε	↗

γ. $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ (Ι)

Η (Ι) στο $(-1,0)\cup(0,+\infty)-\{1,2\}$ είναι ισοδύναμη με την

$[f(\beta)-1](x-2)+[f(\gamma)-1](x-1)=0$

Έστω $g(x)=[f(\beta)-1](x-2)+[f(\gamma)-1](x-1)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών με

$g(1)=-[f(\beta)-1]=1-f(\beta)<0$

$g(2)=f(\gamma)-1>0$

γιατί αφού ισχύει $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και $f(x)=1 \Leftrightarrow x=0$ και αφού $\beta, \gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ οπότε $f(\beta)>1$ και $f(\gamma)>1$

άρα $g(1)g(2)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ άρα και η ισοδύναμή της (Ι) θα έχει στο $(1,2)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x)=\int_0^x tf(t)dt,\quad x\in[0,2],$$

$$G(x)=\begin{cases} \dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0,2].

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,2) και ότι ισχύει

$$G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2},\ 0<x<2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha\in(0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Η G είναι συνεχής στο (0,2] ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών. Εξετάζουμε την συνέχεια στο $x_0=0$.

Είναι $G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-(1-t^2)}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})}=$

$$=6\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}G(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3\right)$ (1)

έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}(xf(x))=0\cdot f(0)=0$

επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=0$, αφού η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη άρα και συνεχής άρα από (1) $\lim\limits_{x\to 0}G(x)$=0+3=3=G(0), οπότε G συνεχής στο x_0=0, επομένως συνεχής στο [0,2].

β. Η $H(x)=\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο [0,2] αφού tf(t) συνεχής στο [0,2] και 0∈[0,2], άρα παραγωγίσιμη στο (0,2) ⊆ [0,2]
η x παραγωγίσιμη στο R άρα και στο (0,2), οπότε η $\frac{H(x)}{x}$ παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο [0,2], αφού η f συνεχής στο [0,2] και 0∈[0,2] άρα παραγωγίσιμη και στο (0,2)⊆[0,2], οπότε G παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων στο (0,2) με

$$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)'=\left(\frac{H(x)}{x}\right)'-\left(\int_0^x f(t)dt\right)'+(3)'=$$

$$=\frac{H'(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=\frac{xf(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2},\text{ για } 0<x<2$$

γ. Η G είναι συνεχής στο [0,2] όπως δείξαμε στο (α) ερώτημα, επίσης παραγωγίσιμη στο (0,2) όπως δείξαμε στο (β) ερώτημα και G(0)=3 και

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\frac{1}{2}\int_0^2 tf(t)dt-\int_0^2 f(t)dt+3=$$

$$=\frac{\int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt}{2}+3=\frac{\int_0^2 (tf(t)-2f(t))dt}{2}+3=$$

$$=\frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2}+3\overset{\text{υπ.}}{=}0+3=3$$

οπότε G(0)=G(2) και σύμφωνα με Θεώρημα Rolle υπάρχει α∈(0,2) ώστε G′(α)=0, δηλαδή $-\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow H(\alpha)=0$

δ. (**α′ τρόπος**)
Στο [0,α] η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0,α) ⊆ (0,2), αφού α∈(0,2) οπότε σύμφωνα με Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ∈(0,α) ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha-0}=\frac{G(\alpha)-3}{\alpha}=\frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^\alpha f(t)dt+3-3}{\alpha}\overset{H(\alpha)=0}{=}-\frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$$

δηλαδή $G'(\xi)=-\dfrac{\int_0^{\alpha} f(t)dt}{\alpha}$ όμως $G'(\xi)=-\dfrac{H(\xi)}{\xi^2}$ οπότε

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2}=-\frac{\int_0^{\alpha} f(t)dt}{\alpha} \Leftrightarrow -H(\xi)\cdot\alpha=\xi^2\int_0^{\alpha} f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^{\xi} tf(t)dt\cdot\alpha=\xi^2\int_0^{\alpha} f(t)dt.$$

(β' τρόπος)

Αρκεί να δείξουμε ότι μία τουλάχιστον ρίζα $\xi\in(0,\alpha)$ η εξίσωση

$$\alpha\int_0^{x} tf(t)dt=x^2\int_0^{\alpha} f(t)dt \Leftrightarrow \alpha H(x)=x^2\int_0^{\alpha} f(t)dt \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2}=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)dt \overset{(\alpha\pi\acute{o}(\beta))}{\Leftrightarrow}$$

$$G'(x)+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)dt=0 \text{ δηλαδή } \left(G(x)+\frac{x}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)dt\right)'=0 \quad (I)$$

Θεωρούμε την $K(x)=G(x)+\dfrac{x}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(t)dt$, $x\in[0,\alpha]$ που είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\alpha)$ όπως είδαμε στα προηγούμενα ερωτήματα με $K(0)=G(0)+0=3$, $K(\alpha)=G(\alpha)+\int_0^{\alpha} f(t)dt=\dfrac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^{\alpha} f(t)dt+3+\int_0^{\alpha} f(t)dt=0+3=3$, οπότε $K(0)=K(\alpha)$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ ώστε $K'(\xi)=0$, δηλαδή $K'(x)=0$, οπότε και η (I) έχει λύση στο $(0,\alpha)$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα καλύπτουν μεγάλο και ουσιώδες μέρος της εξεταστέας ύλης και διακρίνονται ως προς τον βαθμό κλιμακούμενης δυσκολίας , στην σειρά των ερωτημάτων σε κάθε ζήτημα. Ειδικά το 4ο ΘΕΜΑ απαιτεί ξεχωριστή συνθετική και κριτική ικανότητα και ο τρόπος αντιμετώπισής του θα κρίνει το ποσοστό υψηλών βαθμολογιών.