ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της να γραφεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **σωστό** ή **λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 τότε η f΄ είναι συνεχής στο σημείο x_0.

Μονάδες 4,5

B2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτόμενη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.

Στήλη Α συναρτήσεις	**Στήλη Β**
α. $f(x)=3x^3,\ x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu 2x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\|x\|,\ x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Α1. Απάντηση: σελίδα 214 σχολικού βιβλίου
Α2. Απάντηση: σελίδα 217 σχολικού βιβλίου

Β1. Απάντηση: α – ΛΑΘΟΣ, β – ΛΑΘΟΣ, γ – ΣΩΣΤΗ
Β2. Απάντηση: α –3, β – 1, γ – 5, δ –2

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z\in C$ με $x\neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

(α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$w_1=f(9-5i)$ Μονάδες 6

$$w_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right]^{2004}$$ Μονάδες 6

(β) Θεωρούμε τον πίνακα $M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}|w_1| & 0\\ 0 & -|w_1|\end{bmatrix}$, όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος (α).
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνία $\theta=\frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$
Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$
Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$
Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Μονάδες 5

(γ) Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος (β), τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει $M\cdot X = K$, όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Είναι $f(z) = \frac{3\bar{z}+i}{\bar{z}-2i}$, με $z \in C,\ z \neq -2i$.

(α) Έχουμε ότι:

$$w_1 = f(9-5i) = \frac{3(9+5i)+i}{9+5i-2i} = \frac{18-9i}{9+3i} = \frac{9}{3}\cdot\frac{2-i}{3+i} = 3\cdot\frac{(2-i)(3-i)}{10} =$$

$$= \frac{3}{10}(5-5i) = \frac{3}{2}(1-i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Είναι $2004 = 4\cdot 501$, οπότε έχουμε:

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right]^{2004} = \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}[\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{4}) + i\eta\mu(-\frac{\pi}{4})]^4\right]\right)^{501} =$$

$$= [\sigma\upsilon\nu(-\pi) + i\eta\mu(-\pi)]^{501} = (-1)^{501} = -1$$

(β) Είναι:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_2| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

απάντηση Β

(γ) Είναι: $K = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} & -\eta\mu\frac{\pi}{2} \\ \eta\mu\frac{\pi}{2} & \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Έχουμε $MX = K \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας Μ έχει ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, άρα είναι αντιστρέψιμος με $M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

(α) Η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

Μονάδες 7

(β) υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$.

Μονάδες 12

(γ) υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$ στο διάστημα [0, 1] που είναι συνεχής και είναι:

$$g(0) = f(0) - 3 = -1$$

$$g(1) = f(1) - 3 = 1$$

Άρα είναι $g(0)g(1) < 0$, οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε να είναι $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$.

Επειδή είναι $g'(x) = f'(x) > 0,\ \ x \in (0,1)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, 1] άρα το x_0 είναι μοναδικό.

ΣΧΟΛΙΟ: Το ερώτημα αντιμετωπίζεται και με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

(β) Επειδή $f'(x) > 0, x \in (0,1)$ αφού η f συνεχής και γνήσια αύξουσα στο [0, 1] θα ισχύουν:

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{1}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{1}{5}) < 4$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{2}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{2}{5}) < 4$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{3}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{3}{5}) < 4$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(\frac{4}{5}) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(\frac{4}{5}) < 4$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2 \cdot 4 < f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) < 4 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4} < 4$$

Άρα, από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε να είναι $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$.

(γ) Θεωρούμε $h(x) = f(x) - 2x,\ x \in [0,1]$ με $h'(x) = f'(x) - 2,\ x \in [0,1]$. Είναι:

$$h(0) = f(0) = 2$$

$$h(1) = f(1) - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

Άρα είναι $h(0) = h(1)$, οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ ώστε να είναι $h'(x_2) = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$ (1).

Έστω (ε) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = f'(x_2)$ και (η) η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 2000$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta = 2$. Από την (1) προκύπτει $\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta = 2$, άρα είναι (ε)//(η).

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + \left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2},\ t \geq 0$, όπου α και β είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

(α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

Μονάδες 15

(β) Με δεδομένο ότι, η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε ότι $f(t) = \dfrac{\alpha t}{1 + (\frac{t}{\beta})^2},\ t \geq 0$. Είναι:

$$f'(t) = \frac{\alpha(1 + \frac{t^2}{\beta^2}) - \alpha t \cdot \frac{2t}{\beta^2}}{[1 + (\frac{t}{\beta})^2]^2} = \frac{\alpha + \frac{\alpha t^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha t^2}{\beta^2}}{[1 + (\frac{t}{\beta})^2]^2} = \frac{\alpha\beta^2 - \alpha t^2}{\beta^2[1 + (\frac{t}{\beta})^2]^2} =$$

$$= \frac{\alpha(\beta - t)(\beta + t)}{\beta^2[1 + (\frac{t}{\beta})^2]^2}$$

Ισχύει $f(6)=15$ και $f'(6)=0$ (αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0=6$ του διαστήματος $(0,+\infty)$, οπότε από το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(6)=0$). Είναι λοιπόν:

$$\begin{cases} f(6)=15 \\ f'(6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\dfrac{36}{\beta^2}}=15 \\ \alpha(\beta-6)(\beta+6)=0 \end{cases} \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{2}=15 \\ \beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=6 \end{cases}$$

οπότε είναι $f'(t)=\dfrac{5t}{1+(\frac{t}{6})^2},\ t\geq 0$.

(β) Πρέπει να είναι:

$$f(t)\geq 12 \Leftrightarrow \frac{5t}{1+(\frac{t}{6})^2}\geq 12 \Leftrightarrow 5t\geq 12+12(\frac{t}{6})^2 \Leftrightarrow \frac{t^2}{3}-5t+12\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2-15t+36\leq 0 \Leftrightarrow t\in[3,12]$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα θέματα καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης και κρίνονται αυξημένης δυσκολίας.

Ειδικά στα Θέματα 2 και 4, πρέπει ο υποψήφιος να διακρίνεται:

(α) από την ευχέρεια στην εκτέλεση των πράξεων, και

(β) από την ικανότητα καλής αναπαραγωγής των γνώσεων του σχολικού βιβλίου.

Τα Θέμα 3 κρίνεται ως το δυσκολότερο θέμα των σημερινών εξετάσεων, απαιτώντας αυξημένη συνθετική ικανότητα από τον υποψήφιο και ιδιαίτερα το 3β, που θέλει καλή γνώση στην εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών.

Γενικά, η προσδοκία μέσης και υψηλής βαθμολογίας θα επιτευχθεί μόνο από πολύ καλά προετοιμασμένους υποψήφιους.

Οι προτεινόμενες λύσεις είναι ενδεικτικές.