



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Επιμέλεια:
Ομάδα Μαθηματικών της
Ωθησης



Τετάρτη, 19 Μαΐου 2010
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Είναι παράγουσες της f στο Δ και

- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγος της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

δ) $(\sin x)' = \eta \mu x, \quad x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- A1. Θεωρία σχολ. σελ 304.
 A2. Θεωρία σχολ. σελ 279
 A3. Θεωρία σχολ. σελ 273
 A4. α) Σ
 β) Σ
 γ) Λ
 δ) Λ
 ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

- B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

- B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

- B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

- B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος B3, να αποδείξετε ότι
 $3 \leq |w| \leq 7$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \\ \Delta = 4 - 8 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i = \overline{z_1} \end{cases}$

B2. $z_1^{2010} = [(1+i)^2]^{1005} = (2i)^{1005} = 2^{1005} \cdot i^{1005} = 2^{1005} \cdot i^{4 \cdot 251 + 1} = 2^{1005} \cdot i$
 $z_2^{2010} = [(1-i)^2]^{1005} = (-2i)^{1005} = -2^{1005} \cdot i^{1005} = -2^{1005} \cdot i^{4 \cdot 251 + 1} = -2^{1005} \cdot i$
 αρα $z_1^{2010} + z_2^{2010} = 2^{1005} \cdot i - 2^{1005} \cdot i = 0$

B3. $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - (4 - 3i)| = |1 + i - 1 + i| \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |w - (4 - 3i)| = |2i| \Leftrightarrow |w - (4 - 3i)| = 2$

αρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος C με κέντρο το $K(4, -3)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

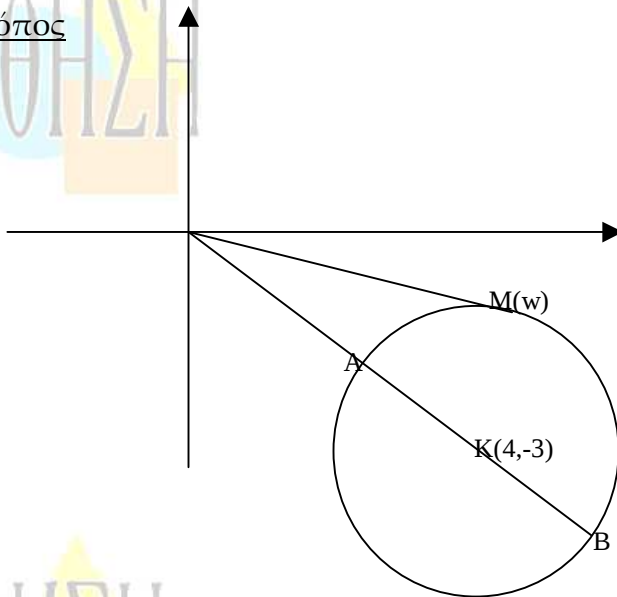
$$C: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

B4. Α τρόπος

Ισχύει: $\|w\| - |4 - 3i| \leq \|w - (4 - 3i)\| \leq \|w\| + |4 - 3i|$ αρα

$$\|w\| - |4 - 3i| \leq 2 \Leftrightarrow \|w\| - 5 \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \|w\| - 5 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2 \leq \|w\| \leq 2 + 5 \Leftrightarrow 3 \leq \|w\| \leq 7$$

Β τρόπος

Έστω $C : (x-4)^2 + (y+3)^2 = 2^2$ και η OK τέμνει τον C στα A, B τότε αν $M(w)$ ισχύει

$$(OA) \leq (OM) \leq (OB) \Leftrightarrow (OK) - r \leq |w| \leq (OK) + r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2 \leq |w| \leq 5 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq |w| \leq 7.$$

$$(OK) = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ'ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Είναι $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2+2x}{x^2+1} = \frac{x^2+x^2+2x+1+1}{x^2+1} = \frac{x^2+(x+1)^2+1}{x^2+1} > 0$

Άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $2(x^2-3x+2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow 2x^2+2(-3x+2) = \ln[(3x-2)^2] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \ln[(x^2)^2+1] + 2x^2 = \ln[(3x-2)^2] - 2(-3x+2) \Leftrightarrow \ln[(x^2)^2+1] + 2x^2 = \ln[(3x-2)^2] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2) \Leftrightarrow x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2+1}\right)' = 2 \cdot \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''(x)	-	○	○	-
f				

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$

Η f είναι κυρτή στο $[-1, 1]$ και κοίλη στα $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ και παρουσιάζει στις θέσεις $x_1 = -1, x_2 = 1$ σημεία καμπής με $f(-1) = -2 + \ln 2$ και $f(1) = 2 + \ln 2$.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, f(-1))$

(ε): $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow$

$y - (-2 + \ln 2) = 1 \cdot (x+1) \Leftrightarrow y = x - 1 + \ln 2$

Έστω (η) η εφαπτομένη της C_f στο $B(1, f(1))$

(η): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (2 + \ln 2) = 3(x-1) \Leftrightarrow$

$y = 3x - 1 + \ln 2$

Θέτουμε στην εξίσωση των εφαπτομένων (ε) και (η) όπου $x=0$ και έχουμε $y = -1 + \ln 2$ άρα οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία καμπής τέμνονται στον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -1 + \ln 2)$

Γ4. (1^{ος} τρόπος)

Είναι $I = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 x(2x + \ln(x^2+1)) dx = \int_{-1}^1 [2x^2 + x \ln(x^2+1)] dx =$
 $\int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2+1) dx$

Αν $I_1 = \int_{-1}^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{-1}{3} \right) = \frac{4}{3}$ και

$$I_2 = \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx \quad \mu\epsilon \quad u = x^2 + 1 \quad du = 2x dx$$

και

x	u
1	2
-1	2

$$\text{Όποτε } I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln(x^2 + 1) 2x dx = \frac{1}{2} \int_2^2 \ln u du = 0.$$

$$\text{Άρα } I = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

(2^{ος} τρόπος)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 [2x^2 + x \ln(x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx = \\ &= \left[2 \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(x^2 + 1) dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - 2 \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx \quad (1) \end{aligned}$$

x^3	$x^2 + 1$
$-x^3 - x$	x
$-x$	

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx &= \int_{-1}^1 x dx - \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 = \\ &= -\frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 2) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε ότι } I = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ.1 Είναι $f(x) = 3 + x + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ επειδή η $\frac{t}{f(t) - t}$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ αφού $f(t) \neq t$ σύμφωνα με την υπόθεση και συνεχής ως πηλίκο των συνεχών $f(t) - t$ και t , η συνάρτησης ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επειδή η $3 + x$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με: $f'(x) = 1 + \frac{x}{f(x) - x} = \frac{f(x) - x + x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$.

Δ.2 Είναι $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με: $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x)$
 $= 2(f(x) - x)f'(x) - 2f(x) =$
 $= 2(f(x) - x) \frac{f(x)}{f(x) - x} - 2f(x) =$ λόγω Δ1
 $= 2f(x) - 2f(x) = 0$

και από συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει $g(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ.3 Από (Δ2) είναι $(f(x))^2 - 2xf(x) = c$ (1)

και από $f(x) = 3 + x + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$, για $x = 0$, έχουμε $f(0) = 0 + 3 + 0 = 3$,

οπότε από (1) για $x = 0$, έχουμε: $(f(0))^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = c \Leftrightarrow 9 = c$,

επομένως ισχύει $(f(x))^2 - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 9 + x^2 \quad (2)$$

Αν τώρα $h(x) = f(x) - x$, έχουμε $(h(x))^2 = 9 + x^2$.

Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x_0) = 0$ προκύπτει από την ισότητα $(h(x_0))^2 = x_0^2 + 9 \Leftrightarrow 0 = x_0^2 + 9$, άτοπο αφού $x_0^2 + 9 > 0$,

άρα $h(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και επειδή συνεχής ως διαφορά συνεχών θα έχει σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή από $h(x) = f(x) - x$, είναι $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$, θα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως από $(h(x))^2 = 9 + x^2$, έχουμε $|h(x)| = \sqrt{9 + x^2}$ και αφού $g(x) > 0$

άρα $f(x) - x = \sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{9 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση για την εύρεση του προσήμου μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: η $h(x) = f(x) - x \neq 0$ από υπόθεση και επειδή είναι συνεχής θα έχει σταθερό πρόσημο και αφού $h(0) = f(0) = 3 > 0$ $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ.4 α' τρόπος

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_x^{x+2} f(t) dt$

$$\Leftrightarrow \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^0 f(t) dt + \int_0^{x+2} f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt < \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^{x+1} f(t) dt$$

Έτσι, αν $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, αρκεί

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x) \quad (1)$$

Η F στα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1 \in (x, x+1)$ και $x_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} \quad \text{και} \quad F'(x_2) = \frac{F(x+2) - F(x+1)}{x+2 - x - 1},$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι $F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Από (Δ2) $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}$ και επειδή από (Δ3) $f(x) - x > 0$ κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(x) = x + \sqrt{9 + x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (αφού $\sqrt{9 + x^2} > \sqrt{x^2} > |x| \geq -x$)

η $f'(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

β' τρόπος

Έστω η συνάρτηση $\phi(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$, που είναι παραγωγίσιμη με $\phi'(x) = f(x+1)(x+1)' - f(x) = f(x+1) - f(x)$,

όπως δείξαμε παραπάνω στο προηγούμενο τρόπο $f'(x) > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα και επειδή $x+1 > x$ ισχύει $f(x+1) > f(x)$,

άρα $\phi'(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$ επομένως ϕ γνησίως αύξουσα,

άρα για $x+1 > x \Leftrightarrow \phi(x+1) > \phi(x) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_x^{x+2} f(t) dt$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

- A. Τα σημερινά θέματα διακρίνονται για την εκτεταμένη εξέταση της ύλης σε βασικές γνώσεις απαιτώντας αρκετή κριτική και συνθετική ικανότητα από τους υποψηφίους καθώς και ευχέρεια στις πράξεις. Η κλιμάκωση της δυσκολίας των θεμάτων δεν έφθασε σε ιδιαίτερα υψηλά επίπεδα , με αποτέλεσμα οι επιδόσεις των υποψηφίων να μην έχουν πιθανόν μεγάλες διαφορές.
- B. Οι παραπάνω λύσεις είναι ενδεικτικές.

