ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΘΕΜΑΤΑ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

06 Ιουνίου, 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών
https://www.othisi.gr/frontistirio/

Τρίτη, 6 Ιουνίου 2023
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f: R \to R$ είναι μία «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fog και gof, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση g: R→R με τύπο $g(x) = \dfrac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση h: $(0, +\infty) \to R$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = goh$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

Β2. i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{συν}(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. $g(x) = \dfrac{4 - e^{2x}}{e^x} = \dfrac{4}{e^x} - e^x$, $x \in R$

$h(x) = \ln x$, $D_h = (0, +\infty)$

$D_{goh} = \{x \in D_h | h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) | \ln x \in R\} = (0, +\infty) \neq \emptyset$,

άρα ορίζεται η συνάρτηση goh με τύπο

$(goh)(x) = g(h(x)) = \dfrac{4}{e^{\ln x}} - e^{\ln x} = \dfrac{4}{x} - x = \dfrac{4 - x^2}{x}$, άρα $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x}, x > 0$.

Β2. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ λόγω της μορφής της, με

$$f'(x) = \frac{(4 - x^2)' \cdot x - (4 - x^2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-2x \cdot x - 4 + x^2}{x^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

<u>Εναλλακτικά για την παραγώγιση:</u>

$$f'(x) = \left(\frac{4}{x} - x\right)' = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$

Ισχύει ότι $e < \pi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (4-e^2)\pi > (4-\pi^2)e \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

$(*)$ αφού $4-e^2 < 0 \Leftrightarrow 4 < e^2 \Leftrightarrow 2 < e$.

B3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(4-x^2) = +\infty,$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(4-x^2) = 4.$

Άρα η $(\varepsilon_1): x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και δεν έχει άλλη, αφού η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) \overset{\lambda=-1}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \beta = 0,$$

άρα η $(\varepsilon_2): y = -x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

<u>2ος τρόπος</u>

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x} = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$, άρα η $\varepsilon_2: y = -x$

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty \quad (1)$$

Για κάθε $x > 0$

$$\left|\frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\text{συν}(1+x^2)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|}$$

Συνεπώς $-\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$ από (1)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1\end{cases}$$

όπου $\alpha\in R$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x'x (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος **Γ2**. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x\geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα x'x και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Διαδοχικά έχουμε:

$$\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 (1+\alpha x)dx=1\Leftrightarrow$$

$$\left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow$$

$$3+\frac{\alpha\cdot 3^2}{2}-\left(2+\frac{\alpha\cdot 2^2}{2}\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$3+\frac{9}{2}\alpha-2-\frac{4}{2}\alpha=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha=0$$

Γ2. i) Για $x<1$ είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=1-2=-1$$

Για $x>1$ είναι:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{(x-1)x}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$.

ii) Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y-1=-1(x-1) \Leftrightarrow$$

$$y-1=-x+1 \Leftrightarrow \boxed{(\varepsilon): y=-x+2}$$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η $(\varepsilon): y=-x+2$ με το x'x. Επίσης το σημείο επαφής είναι το $M(1,f(1))$. Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega\\ \lambda_\varepsilon=f'(1)\end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=f'(1)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow \boxed{\omega=\frac{3\pi}{4}}$$

Γ3. Για κάθε $x<1$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=2x-3$$

Για κάθε $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x<1\\ -1, & x=1\\ -\frac{1}{x^2}, & x>1\end{cases}=\begin{cases}2x-3, & x\le 1\\ -\frac{1}{x^2}, & x>1\end{cases}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R είναι και συνεχής στο R.

Για κάθε $x\le 1$ έχουμε

$x \le 1 \Leftrightarrow 2x \le 2 \Leftrightarrow 2x - 3 \le -1 \Leftrightarrow f'(x) \le -1 < 0$

Για κάθε $x > 1$, έχουμε:

$$-\frac{1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

Άρα η $f'(x) < 0, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και f συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, επομένως και "1-1".

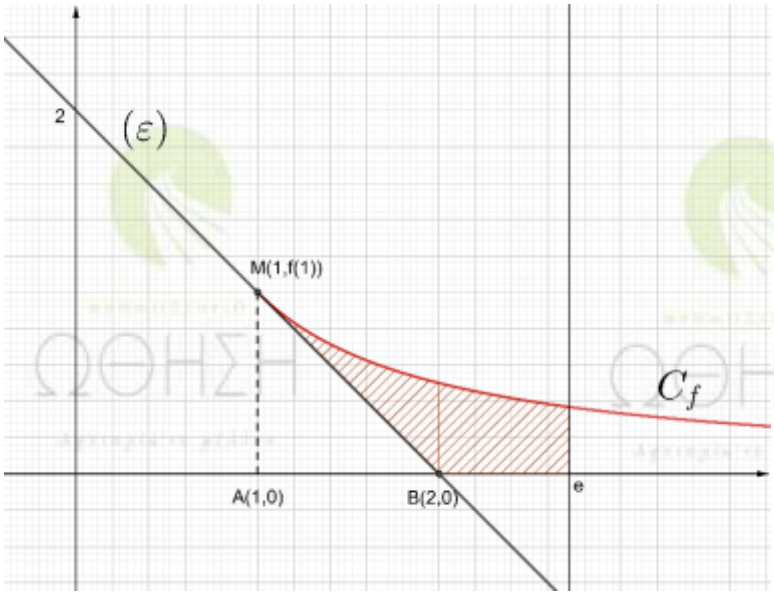
Άρα

$$f(D_f) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Γ4. Η $(\varepsilon): y = -x + 2$ εφάπτεται της C_f στο Μ από Γ2 και τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 2)$ και τον $x'x$ στο $(2, 0)$.



Οπότε θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου, έστω Ω.

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)|\, dx - (MAB)$$

με $\int_1^e |f(x)|\, dx = \int_1^e f(x)\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\ln|x|]_1^e = \ln e = 1$

και $(MAB) = \frac{1}{2} \cdot (MA) \cdot (AB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

άρα $E(\Omega) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $(0,2)\to R$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\quad \text{όπου } \kappa\in R$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in R$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi\in(0,1)$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Είναι $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \ x\in(0,2),\ \ \kappa\in R$

Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}, x\neq 1$ με $\lim_{x\to 1}g(x)=\ell\in R$

Τότε για $x\neq 1$ «κοντά» στο $x_0=1$, έχουμε:

$$f(x)-2x=g(x)(x-1)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=g(x)(x-1)+2x\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,2)$, τότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, οπότε ισχύει $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Επομένως, $f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln(2-1) - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 3}$

Δ2. Για $\kappa = 3$, ο τύπος της συνάρτησης f, γίνεται:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, x \in (0,2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right)' = \frac{1}{2-x}\cdot(2-x)' + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2-x} =$$

$$= \frac{2-x-x^2}{(2-x)x^2} = -\frac{x^2+x-2}{(2-x)x^2}, x \in (0,2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x^2+x-2)}{(2-x)x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \ (\text{δεκτή}) \ \ \text{ή}\ x = -2\ (\text{απορ.})$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{(x^2+x-2)}{(2-x)x^2} > 0 \xRightarrow{x\in(0,2)} x^2+x-2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in (-2,1) \\ x \in (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0,1)$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,2)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Ο.Μ.

$$f(1) = 2$$

- Για κάθε $x \in (0,1) = \Delta_1$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, τότε:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) \overset{\ln 2-(+\infty)+3}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2$$

- Για κάθε $x \in [1,2) = \Delta_2$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, τότε:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$$

$$\text{αφού } \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) \overset{(-\infty)-\frac{1}{2}+3}{=} -\infty$$

$$\text{επειδή } \lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) \underset{\substack{x\to 2^-\\ u\to 0^+}}{\overset{u=2-x}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

Επειδή το $0\in f(\Delta_1)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$, το οποίο είναι και μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

Επειδή το $0\in f(\Delta_2)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$, το οποίο είναι και μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$.

$$\text{Έστω } \frac{1}{3} \le x_1 < 1 \overset{\substack{f \text{ γν.αύξουσα}\\ \text{στο } (0,1]}}{\Leftrightarrow} f(x_1) \ge f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \ge \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Leftrightarrow$$

$$0 \ge \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 \Leftrightarrow 0 \ge \ln\frac{5}{3}, \text{ άτοπο}$$

$$\text{αφού } \frac{5}{3} > 1 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln\frac{5}{3} > \ln 1 \Leftrightarrow \ln\frac{5}{3} > 0$$

οπότε $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

τότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} \overset{f(x_1)=0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως ρητή με

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2-x}\right)' = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{(2-x)^2}\cdot(2-x)' =$$
$$= -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{(2-x)^2} < 0\,, \quad \text{για κάθε } x\in(0,2)$$

οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in\left(x_1, \frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$

στο οποίο η κλίση της C_f ισούται με $\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i) Επειδή F, G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο (0,2), τότε ισχύει:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x) \\ G'(x) = g(x) \end{cases}, \quad \text{για κάθε } x\in(0,2) \Rightarrow$$
$$F'(x) = G'(x), \quad \text{για κάθε } x\in(0,2) \Rightarrow$$
$$F(x) = G(x) + c, \quad \text{για κάθε } x\in(0,2), \quad c\in R$$

για $x=x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \overset{F(x_1)=0}{\Leftrightarrow} c = -G(x_1)$ (1)

για $x=x_2$: $F(x_2) = G(x_2) + c \overset{G(x_2)=0}{\Leftrightarrow} F(x_2) = c \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = [G(x)]_{x_1}^{x_2}$$
$$\Rightarrow F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1)$$
$$\Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1)$$
$$\Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

ii) Έστω $K(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$K(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_1\cdot 0 + x_2G(x_1) + x_1 - x_2 \Leftrightarrow$$
$$K(x_1) = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2 \Leftrightarrow$$
$$K(x_2) = x_1F(x_2) + x_2 - x_1$$

Ο πίνακας μεταβολών της F με βάση τα πρόσημα της f είναι:

	0		x_1		1		x_2		2
$F'=f$		−	0	+		+	0	−	
F		↘		↗		↗		↘	

Επειδή F είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ με $F(x_1) = 0$,
άρα καθώς $x_2 > x_1 \Leftrightarrow F(x_2) > F(x_1) = 0$
Τότε

$$K(x_1) = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2 < 0$$

αφού $-x_2F(x_2)<0$ και $x_1 - x_2 < 0$

$$K(x_2) = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

Άρα $K(x_1)K(x_2)<0$, συνεπώς από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ με $K(x_0)=0$.
Επειδή η

$$K'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 \Leftrightarrow$$
$$K'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 \Leftrightarrow$$
$$K'(x) = f(x)(x_1 + x_2) + 2 > 0$$

αφού $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, x_2]$ και τότε

$$f(x)(x_1 + x_2) + 2 \geq 2 > 0$$

Άρα $K'(x)>0$ άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = x_1F(x) - x_1 + x, x \in [x_1, x_2]$$

Προφανής ρίζα: $h(x_1) = 0$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με

$$h'(x) = x_1f(x_1) + 1, x \in [x_1, x_2]$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ τότε από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2) και επειδή $f(1) = 2$ $(x_1 < 1 < x_2)$ τότε

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2)$$

Άρα $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ οπότε η h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ οπότε για $x > x_1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_1) = 0$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x_2G(x) - x_2 + x, x \in [x_1, x_2]$
Προφανής ρίζα: $\varphi(x_2) = 0$
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $\varphi'(x) = x_2f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$
Τότε η φ γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ οπότε για

$$x < x_2 \overset{\varphi\uparrow}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(x_2) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = h(x) + \varphi(x), x \in [x_1, x_2]$
Η K είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{array}{l} K(x_1) = h(x_1) + \varphi(x_1) \\ K(x_2) = h(x_2) + \varphi(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow K(x_1) \cdot K(x_2) < 0$$

Τότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα η οποία είναι μοναδική επειδή $K'(x) = h'(x) + \varphi'(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η K γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η σημερινή εξέταση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού διακρίνονται για την πληρότητα της εξεταστέας ύλης και τη σωστή κλιμάκωση δυσκολίας. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα την αντικειμενική αξιολόγηση των υποψηφίων.

Καλή επιτυχία!

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΩΘΗΣΗ

Αφετηρία το μέλλον