

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΘΕΜΑΤΑ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

02 Ιουνίου, 2025

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΩΘΗΣΗ

Αφειρηρία το μέλλον

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών
<https://www.othisi.gr/frontistirio/>

Δευτέρα, 2 Ιουνίου 2025
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .
- β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof) = (hog)of$.

γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186.

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα B2 έως B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

B4. Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του D_f στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο, άρα από Θεώρημα Fermat, πρέπει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$ άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -6}$

B2. Για $\alpha = -6$ η f γίνεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3 \text{ και}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3 \text{ από πρόσημο τριωνύμου.}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
f	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Επειδή $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ και f συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και στο $[3, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[3, +\infty)$.

Επειδή $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$ και f συνεχής στο $[1, 3]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Ισχύει τότε $f((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$ αφού

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$,
- $f(1) = 1$.

$$f([1, 3]) = [f(3), f(1)] = [-3, 1], \text{ αφού } f(3) = -3$$

$$f([3, +\infty)) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty), \text{ αφού είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Επειδή το 0 ανήκει σε κάθε ένα από τα διαστήματα $f((-\infty, 1])$, $f([1, 3])$ και $f([3, +\infty))$, θα υπάρχουν $x_1 \in (-\infty, 1)$, $x_2 \in (1, 3)$ και $x_3 \in (3, +\infty)$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$.

Λόγω μονοτονίας της f σε καθένα από τα $(-\infty, 1]$, $[1, 3]$ και $[3, +\infty)$ θα είναι τρεις ακριβώς ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, με x_2 και x_3 θετικές.

Θα δείξουμε ότι το x_1 είναι θετικό.

Είναι $f(0) = -3$, άρα $f(0) < f(x_1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 0 < x_1$.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f''(x) = 6x - 12$.

Από $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f			

Από $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow 6x > 12 \Leftrightarrow x > 2$, κι επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$, προκύπτει ότι: f κοίλη στο $(-\infty, 2]$, f κυρτή στο $[2, +\infty)$ και σημείο καμπής το $(2, -1)$.

B4. Η συνάρτηση $g(x) = x + f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με $g'(x) = f'(x) + 1$. Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ και η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$, έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$, πρέπει $x = 0$, οπότε οι εξισώσεις γίνονται αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_2): y - f(\xi) = f'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow y = -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi)$$

άρα τέμνει τον $y'y$ στο $A(0, -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi))$.

$$(\varepsilon_1): y - g(\xi) = g'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow y = -g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi)$$

$$\Leftrightarrow y = -(f'(\xi) + 1) \cdot \xi + f(\xi) + \xi \Leftrightarrow y = -f'(\xi) \cdot \xi - \xi + f(\xi) + \xi$$

$$\Leftrightarrow y = -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)$$

άρα τέμνει τον $y'y$ στο $B(0, -\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi))$, άρα τα σημεία A και B ταυτίζονται, οπότε οι εφαπτομένες τέμνονται στο ίδιο σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4)

Μονάδες 6

- Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x), x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Γ1.** Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = e^0 \eta \mu 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Έχουμε ότι

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty, \quad \text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ από Γ1 ερώτημα.

Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Στο $-\infty$: $f(x) = e^x \eta \mu x$

Ισχύει ότι

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x |\eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow$$

$$|e^x \eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow$$

$$-e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x \Leftrightarrow$$

$$-e^x \leq f(x) \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) \text{ τότε από το κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Στο $+\infty$: $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \text{ άρα } \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}^2 - 1^2 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \text{ άρα } \beta = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{f(x) - x - \frac{1}{2} = 0} \quad (1)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (-\pi, 0)$.

Έστω $g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, για $x \in [-\pi, 0]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \text{ ρίζα της εξίσωσης } f(x) - x - \frac{1}{2} = 0$$

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $x(t) \geq 0$ άρα $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Αναζητούμε σημείο $M_0(x(t_0), y(t_0))$ ώστε $x'(t_0) = y'(t_0)$ (2)

Το $M \in C_f$ άρα $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ τότε:

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Την χρονική στιγμή t_0 πρέπει:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{(2x(t_0) + 1)x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x'(t_0) > 0}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \cdot \frac{2x(t_0) + 1}{2x(t_0) + 1} &= 1 \Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \\ \Leftrightarrow (2x(t_0) + 1)^2 &= 4(x^2(t_0) + x(t_0)) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ αδύνατο}$$

Συνεπώς δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι :

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x \ln x}$, $x > 0$ είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα x' ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Είναι $F'(x) = f(x)$ με $x > 0$.

Ισχύει $xf(x) = 2F(x)\ln x$, $x > 0$ (1)

και ακόμη $f'(1) = 2$ αφού η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $(\varepsilon): y = 2x$. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - \frac{2F(x)\ln x}{x} \cdot x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} \\ &= \frac{x^{\ln x} \left[f(x) - \frac{2F(x)\ln x}{x} \right]}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) - \frac{2F(x)\ln x}{x}}{x^{\ln x}} = \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x \cdot x^{\ln x}} \\ &= 0 \text{ λόγω της (1)} \end{aligned}$$

$$(*) x^{\ln x} = e^{\ln x \ln x} = e^{\ln^2 x}, x > 0$$

$$\text{Άρα } (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)' = 2 \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x} = 2 \frac{\ln x}{x} x^{\ln x}, x > 0$$

$$\text{Άρα } g(x) = c, x > 0$$

Δ2. i) Ισχύει $xf(x) = 2F(x)\ln x$, $x > 0$

Για $x = 1$, $f(1) = 0$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \stackrel{0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

2ος τρόπος

Από $xf(x) = 2F(x)\ln x$ παραγωγίζοντας έχουμε

$$f(x) + xf'(x) = 2F'(x)\ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow xf'(x)$$

$$= 2f(x)\ln x + \frac{2F(x)}{x} - f(x) \stackrel{x>0}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{2f(x)\ln x}{x} + \frac{2F(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x},$$

άρα η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2 \text{ αφού η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο}$$

$M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$, άρα $f'(1) = 2$

ii) Η F είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x} \text{ για } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ από } \Delta 2 \text{ i)}$$

Ακόμη $g(x) = c$ και $g(1) = F(1) = 1$, οπότε $c = 1$.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \ g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0.$$

2^{ος} τρόπος

Παραγωγίζοντας την $xf(x) = 2F(x)\ln x$ έχουμε :

$$f(x) + xf'(x) = 2F'(x)\ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + \frac{2F(x)}{x}$$

Για $x = 1$ έχουμε :

$$f(1) + f'(1) = 2f(1)\ln x + 2F(1) \Rightarrow 0 + 2 = 0 + 2F(1) \Rightarrow F(1) = 1$$

Συνεχίζουμε ομοίως με τα προηγούμενα...

Δ3. $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = \frac{2\ln x}{x} \cdot x^{\ln x}, x > 0$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		○	+
F		↗	↗

Άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
Είναι

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 = F(x) - F(x^2)$$

η ισότητα ισχύει για $x = 1$.

Για $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \stackrel{F \uparrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) < 0$
και $(x-1)^2 > 0$ άρα η εξίσωση (2) είναι αδύνατη

Για $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x \stackrel{F \downarrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x) - F(x^2) < 0$
και $(x-1)^2 > 0$ άρα η (2) είναι αδύνατη.

Τελικά μοναδική ρίζα είναι η $x = 1$.

Δ4. Είναι

$$E(\Omega) = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx$$

για $x \geq 1 \Leftrightarrow F(x) \geq F(1) = 1 > 0$

και $F(x) = e^{\ln^2 x}$

ισχύει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ αφού $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα $F(x) \geq \ln^2 x + 1$

και η ισότητα ισχύει μόνο στο 1 οπότε:

$$\begin{aligned} \int_1^e F(x) dx &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + e - 1 \\ &= \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + e - 1 = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx + e - 1 \\ &= e - \int_1^e (2x)' \ln x dx + e - 1 = \\ &= e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2 dx + e - 1 \\ &= e - 2e + 2(e - 1) + e - 1 = e - 2e + 2e - 2 + e - 1 \\ &= 2e - 3 \end{aligned}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα εξετάζουν μεγάλο ποσοστό της εξεταστέας ύλης. Ένα κύριο χαρακτηριστικό των θεμάτων είναι η απότομη κλιμάκωση της δυσκολίας στο θέμα Δ. Θα απαιτηθεί αρκετός χρόνος για την αντιμετώπιση των τριών πρώτων θεμάτων και αυτό στενεύει τα περιθώρια αντίδρασης για το θέμα Δ. Κρίνουμε γι' αυτό το λόγο ότι οι υψηλές βαθμολογίες θα έχουν χαμηλότερο ποσοστό σε σχέση με τις περυσινές.

Καλή επιτυχία!



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΩΘΗΣΗ

Αφειρηρία το μέλλον