ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

ΘΕΜΑΤΑ & ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

03 Ιουνίου, 2026

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΩΘΗΣΗ
Αφετηρία το μέλλον

Επιμέλεια: Ομάδα Μαθηματικών
https://www.othisi.gr/frontistirio/

Τετάρτη, 3 Ιουνίου 2026
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f: R \to R$ είναι ¨1-1¨, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διαστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει $(fog)'(x_o) = f'\big(g(x_o)\big) \cdot g'(x_o)$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1),

είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

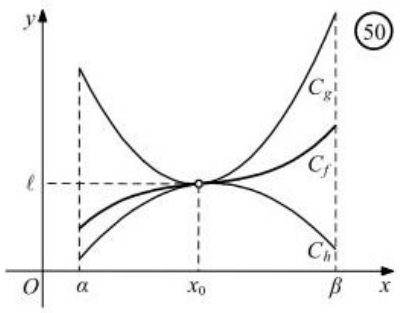
- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0

και

- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$



Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \to R, \text{ με τύπο } f(x) = 2\ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \to R, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Ισχύει $D_h = D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \ge 2 \mid \sqrt{x-2} + 1 > 1\} =$

$= \{x \ge 2 \mid \sqrt{x-2} > 0\} = \{x \ge 2 \mid x - 2 > 0\} = \{x \ge 2 \mid x > 2\} = (2, +\infty)$.

Άρα $D_h = D_{fog} = (2, +\infty)$ τότε ορίζεται η συνάρτηση h με τύπο

$h(x) = (fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln\big(\sqrt{x-2} + 1 - 1\big) =$

$= 2\ln\sqrt{x-2} = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2)$, με $x > 2$.

Β2. **(α' τρόπος)**

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ και για κάθε $x > 2$

ισχύει $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η συνάρτηση h είναι ''1-1'' άρα αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$,

άρα το σύνολο τιμών είναι:

$h\big((2, +\infty)\big) = \Big(\lim\limits_{x\to 2^+} h(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\Big) = R$

αφού $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \overset{\substack{u=x-2\\ x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-2) \overset{\substack{u=x-2\\ x\to+\infty\\ u\to+\infty}}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

Θεωρούμε την εξίσωση

$h(x) = y$ όπου $x \in D_h = (2, +\infty)$ και $y \in h(D_h) = D_{h^{-1}} = R$

και ισοδύναμα έχουμε:

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $D_{h^{-1}} = R$

(β' τρόπος)

Έχουμε $h(x) = \ln(x-2)$

Έστω $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$, τότε:

$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Επομένως η συνάρτηση h είναι "1-1" άρα αντιστρέφεται.

Θεωρούμε την εξίσωση $h(x) = y$ όπου $x \in D_h = (2, +\infty)$

και ισοδύναμα έχουμε:

$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x - 2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$, με $y \in R$

Πρέπει επιπλέον $e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$, που ισχύει

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in R$.

Β3. Κοντά στο $x_0 = 2$ για $x > 2$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$t(x) = h(x)\frac{f(x)}{x-2} = \ln(x-2)\frac{2\ln(x-1)}{x-2} = 2\ln(x-2)\frac{\ln(x-1)}{x-2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \overset{\substack{u=x-2\\ x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{(\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 2} t(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} t(x) = -\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f: R → R με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με κ, μ ∈ R, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

•Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

•Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa = 0$ και

ii) $\mu = 1$

Μονάδες 8

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 6)

ii)Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3)

και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για κάθε τιμή της παραμέτρου α ∈ R. (μονάδες 2)

Μονάδες 11

Γ3. Για ν ∈ N ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, ν ∈ N.

ii)Να υπολογίσετε τα I_0, I_1 και I_2.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. i) Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\kappa \cdot x) = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$

Η περίπτωση αυτή απορρίπτεται γιατί τότε η f δεν θα είχε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αν $\kappa = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2+1}$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0, & \text{αν } \mu = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mu \cdot \frac{1}{x}) = 0, & \text{αν } \mu \neq 0 \end{cases}$$

Άρα για $\kappa = 0$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $(\varepsilon): y = 0$.

ii) Για $\kappa = 0$, ο τύπος της f, γίνεται $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο R, με

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2+1) - \mu x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2}$$

Αφού η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην C_f στο $O(0,0)$ τότε πρέπει

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

Γ2. i) Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ από (Γ1) ερώτημα,

έχουμε: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ και $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	T.E.	↗	T. M.	↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = \frac{1}{2}$

ii)• Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$,
άρα $f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

• Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_2 = [-1,1]$,
άρα $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$,
άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

Επομένως, $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Για την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχουμε οτι $f(x) \le \frac{1}{2}$ με το $'' = ''$ μόνο για $x = 1$ και $\frac{1}{2} + \alpha^2 \ge \frac{1}{2}$ με το $'' = ''$ μόνο για $\alpha = 0$.

Άρα, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ είναι αδύνατη, αφού τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$.

Για $\alpha = 0$ η εξίσωση γίνεται: $f(x) = \frac{1}{2}$

και έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ αφού $f(1) = \frac{1}{2}$.

Γ3. i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\right)dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+2+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+1}\cdot x^2}{x^2+1}dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - \frac{0}{2\nu+2} = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) Χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$

Για $\nu = 0$,: $I_o = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_o^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Για τα ολοκληρώματα I_1 και I_2 χρησιμοποιούμε τον τύπο του ερωτήματος (Γ3)(i).

Για $\nu = 0$, έχουμε:

$$I_o + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_o \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

Για $\nu = 1$, έχουμε:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2(1-\ln 2)}{4}$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2-2\ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: R \to R$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in R$.
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1,0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in R$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας y'y χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Ύπαρξη ρίζας

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + x, x \in [-1,0]$

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$
  αφού ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in R$ (1),
  άρα για $x = -1$ από την σχέση (1), έχουμε:
  $0 < g(-1) < 1 \Leftrightarrow -1 < g(-1) - 1 < 0$
  και $h(0) = g(0) > 0$
  αφού για $x = 0$ από την σχέση (1), έχουμε $0 < g(0) < 1$

Άρα $h(-1)h(0) < 0$ επομένως από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Μοναδικότητα ρίζας

(α' τρόπος)

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0]$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,0]$

Η συνάρτηση h' είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,0]$ άρα από Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,0]$, επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,0]$.

Επειδή $-1 < 0$ και $h(-1) < 0 < h(0)$ και η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,0]$ τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$, την $x = x_1$.

(β' τρόπος)

Αν η εξίσωση $g(x) + x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,0)$, έστω τις $\rho_1, \rho_2 \in (-1,0)$ με $\rho_1 < \rho_2$

- η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$
- $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$

τότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$, άτοπο, αφού $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in R$.

Επομένως, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ την $x = x_1$.

Δ2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f = \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$,

άρα και στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \in R \quad (2)$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \big(x(g(x)+x)\big) = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) =$$

$$2\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} - \kappa = 3 - \kappa$$

Οπότε από την (2) έχουμε: $3-\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3. Για $\kappa = 3$, ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = 0$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$, τότε:

$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega-1)(2\omega^2 - \omega - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega-1)2(\omega-1)(\omega+\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$

$2(\omega-1)^2\left(\omega+\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega-1)^2(2\omega+1) = 0 \Leftrightarrow$

Σχήμα Horner

2	−3	0	1	ρ = 1
	2	−1	−1	
2	−1	−1	0	

$\omega = 1$ ή $2\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ x = 2\kappa\pi, \kappa \in Z \\ x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 0$ ή $\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}, \text{αδύνατη} \\ \text{επειδή } \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix}\right\}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα για $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

άρα το σύνολο τιμών της f θα είναι:

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

αφού $f(0) = 0$ και

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$$

αφού $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2 - \frac{3\pi}{2}$

και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty$

επειδή $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$

αφού $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$ και κοντά στο $x_o = \frac{\pi}{2}$ για $x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x > 0$

Επειδή $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$, το οποίο είναι μοναδικό αφού

f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4. i) Από το ερώτημα Δ1:

για κάθε $x_1 \le x \le 0 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x_1) \le h(x) \Leftrightarrow 0 \le g(x) + x$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$

τότε $x^2(g(x) + x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$, αφού f συνεχής.

(α' τρόπος)

ii) Από το ερώτημα Δ3 (i) ισχύει $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

άρα ισχύει $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή ο άξονας y'y χωρίζει το Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία, τότε ισχύει:

$$\int_{x_1}^{0} |f(x)|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|dx = \frac{E(\Omega)}{2} \overset{f(x)\ge 0}{\Longleftrightarrow} \int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \frac{E(\Omega)}{2}$$

Έχουμε: $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)dx =$

$$= \left(0 - x_1^3 g(x_1)\right) - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx \ (1)$$

Έχουμε $x^2 g(x) + x^3 = f(x) \Leftrightarrow x^2 g(x) = f(x) - x^3$ (2)

Από σχέση (1) και (2) ισχύει:

$$x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)dx + 3\int_{x_1}^{0} x^3 dx =$$

$$= x_1^4 - \frac{3}{2}E(\Omega) + \frac{3}{4}[x^4]_{x_4}^0 = x_1^4 - \frac{3}{2}E(\Omega) - \frac{3x_1^4}{4}$$

Οπότε $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} - \frac{3}{2}E(\Omega)$

$$\frac{E(\Omega)}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx =$$

$$= -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\ln|\sigma\upsilon\nu x|]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2}[x^2]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{9} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Οπότε $-\frac{3}{2}E(\Omega) = -3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$

(β' τρόπος)

Η $f(x) \geq 0$ στα $[x_1, 0]$ και $[0, f(x_2)]$ από Δ4(i) και Δ3(i) αντίστοιχα και $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ απο Δ3(ii).

Τότε καθώς πρόκειται για χωρία ισεμβαδικά:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

Τότε

- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \sigma\varphi x - 3x)dx =$

$$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln\sigma\upsilon\nu x - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi^2}{18} + 2 =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

- $\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2(g(x) + x)dx = \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x) + x^3)dx =$

$$= \int_{x_1}^{0} \left(\frac{x^3}{3}\right)' g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x^3}{3}g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(\frac{x_1^3}{3}g(x_1)\right) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} \overset{g(x_1)=-x_1}{=}$$

$$= \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx \quad (2)$$

Από σχέση (1) και (2):

$$1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}=\frac{x_1^4}{12}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+3\ln 2-\frac{\pi^2}{2}=\frac{x_1^4}{4}-\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx=\frac{x_1^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται με σαφή προσανατολισμό προς την κριτική σκέψη και λιγότερο προς την τυποποιημένη αναπαραγωγή. Κάλυπταν μεγάλο μέρος της ύλης, είχαν κλιμακούμενη δυσκολία αλλά απαιτούσαν καλή διαχείριση του χρόνου και ψυχραιμία από τους υποψηφίους. Ειδικότερα:

ΘΕΜΑ Α: Αναμενόμενο χωρίς εκπλήξεις.

ΘΕΜΑ Β: Επίσης προσιτό με κλασικές ασκήσεις.

ΘΕΜΑ Γ: Είχε αυξημένες απαιτήσεις.

ΘΕΜΑ Δ: Το κλειδί για το άριστα. Ήταν ένα σύνθετο θέμα και ειδικά στο Δ4 χρειαζόταν κριτική ικανότητα και πολύ καλό χειρισμό αλγεβρικών πράξεων.

Καλή επιτυχία!

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

ΩΘΗΣΗ

Αφετηρία το μέλλον