

Πέμπτη, 14 Ιουνίου 2001  
 ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1**

A.1. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

Μονάδες 8,5

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Θεωρία του σχολικού βιβλίου, §3.2

A.2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμία από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο ( $=, \leq, \geq$ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

α.  $P(A') \dots\dots\dots 1 - P(A)$

Μονάδες 2

β. Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \dots\dots\dots P(A)$

Μονάδες 2

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

α.  $P(A') = 1 - P(A)$

β. Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \geq P(A)$

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  και A' το αντίθετο του ενδεχομένου A.

α. Αν  $A' \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$

β. Αν  $P(A) = P(A')$  τότε  $2P(A) = P(\Omega)$

Μονάδες 4

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

α. Είναι  $A' \subseteq B$ , άρα  $P(A') \leq P(B) \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) \geq 1$ .

Άρα η πρόταση α είναι Λ.

β. Είναι  $P(A) + P(A') = P(\Omega) \Leftrightarrow 2P(A) = P(\Omega)$ .

Άρα η πρόταση β είναι Σ.

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B) = \frac{5}{12}$  τότε η  $P(A \cup B)$  είναι ίση με:

- α.  $\frac{1}{4}$       β.  $\frac{5}{12}$       γ.  $\frac{2}{3}$       δ.  $\frac{1}{6}$

Μονάδες 4

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Αν  $A \subseteq B$  τότε  $A \cup B = B \Rightarrow P(A \cup B) = P(B) = \frac{5}{12}$ .

Άρα, σωστή απάντηση η β.

B.3. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  και ισχύει ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,

$P(B) = \frac{1}{4}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ .

| ΣΤΗΛΗ Α             | ΣΤΗΛΗ Β            |
|---------------------|--------------------|
| α. $P(A - B)$       | 1. $\frac{1}{20}$  |
| β. $P((B - A)')$    | 2. $\frac{2}{15}$  |
| γ. $P((A \cap B)')$ | 3. $\frac{4}{5}$   |
|                     | 4. $\frac{1}{12}$  |
|                     | 5. $\frac{19}{20}$ |

Μονάδες 6

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Είναι

$$\square P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \quad [\alpha \rightarrow 2]$$

- $P((B-A)') = 1 - P(B-A) = 1 - P(B) + P(B \cap A) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20-5+4}{20} = \frac{19}{20}$  [ $\beta \rightarrow 5$ ]
- $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$  [ $\gamma \rightarrow 3$ ]

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ .

A. Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .

**Μονάδες 8**

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ .

**Μονάδες 8**

Γ. Να βρείτε την τιμή  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση  $\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ .

**Μονάδες 9**

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A. Είναι

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x, \quad A = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)' = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$f''(x) = (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

άρα

$$f(x) + f''(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$$

B. Στο σημείο επαφής  $A(0, 1)$ , η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $y = f'(0) \cdot x + \beta$  με  $f'(0) = 1$ , άρα  $y = x + \beta$  ( $\epsilon$ ). Το  $A$  ικανοποιεί την ( $\epsilon$ ), άρα  $1 = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ .

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $y = x + 1$ .

Γ. Είναι

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

άρα

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow -\lambda - 2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

## ΘΕΜΑ 3

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του βάρους 80 μαθητών της Γ' Τάξης ενός Λυκείου. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις.

| Βάρος σε κιλά<br>[ - ) | Αθροιστική σχετική<br>συχνότητα $F_i$ |
|------------------------|---------------------------------------|
| 45-55                  | 0,2                                   |
| 55-65                  | 0,5                                   |
| 65-75                  |                                       |
| 75-85                  |                                       |

Α. Αν γνωρίζετε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, να βρείτε τις τιμές της αθροιστικής σχετικής συχνότητας που αντιστοιχούν στην τρίτη και τέταρτη κλάση.

**Μονάδες 8**

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παραπάνω δεδομένων.

**Μονάδες 9**

Γ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 80 μαθητών ένα μαθητή.

α. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά.

**Μονάδες 4**

β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 55 κιλών και μικρότερο των 75 κιλών.

**Μονάδες 4**

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α. Επειδή  $f_3 = 2f_1 = 2F_1 = 0,4$  και  $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$  είναι  $f_4 = 0,1$ .

Επομένως ο πίνακας είναι

| ΚΛΑΣΕΙΣ | $f_i$ | $F_i$ | $x_i$ | $x_i \cdot f_i$           |
|---------|-------|-------|-------|---------------------------|
| 45-55   | 0,2   | 0,2   | 50    | 10                        |
| 55-65   | 0,3   | 0,5   | 60    | 18                        |
| 65-75   | 0,4   | 0,9   | 70    | 28                        |
| 75-85   | 0,1   | 1,0   | 80    | 8                         |
| ΣΥΝΟΛΟ  | 1,0   | -     | -     | $\sum x_i \cdot f_i = 64$ |

Β. Άρα  $\bar{x} = \sum x_i \cdot f_i = 64$ .

Γ. (α) Είναι  $P(B \leq 65) = F_2 \% = 50\% = 0,5$

(β) Είναι  $P(55 \leq B \leq 75) = F_3\% - F_1\% = 90\% - 20\% = 70\% = 0,7$

### Παρατηρήσεις

(α) Η μέση τιμή υπολογίζεται και από τον τύπο  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v}$  αφού υπολογιστούν οι αντιστοιχες συχνότητες  $v_i$  από τον τύπο  $f_i = \frac{v_i}{v}$ .

(β) Οι τιμές των πιθανοτήτων μπορούν να υπολογισθούν με τις συχνότητες  $v_i$  και τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας.

## ΘΕΜΑ 4

Σε έρευνα που έγινε στους μαθητές μιας πόλης, για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι το 50% περίπου των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής είναι κατά προσέγγιση κανονική.

A. Να βρείτε το μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους.

**Μονάδες 6**

B. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

**Μονάδες 6**

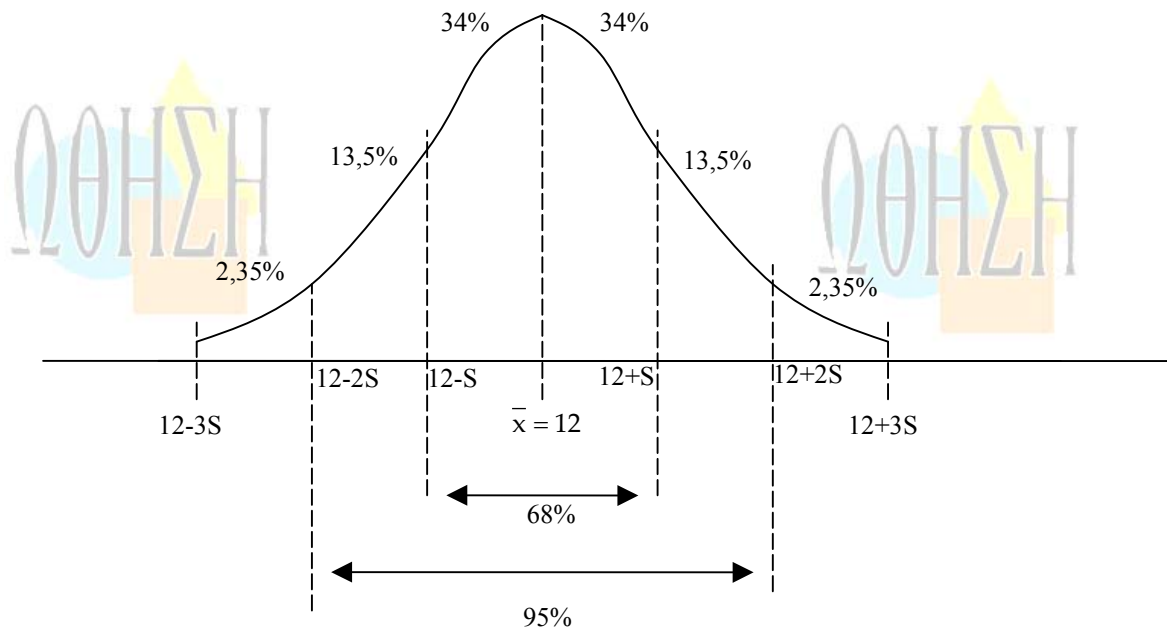
Γ. Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4.000, πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά;

**Μονάδες 6**

Δ. Μία μέρα, λόγω έργων στον κεντρικό δρόμο της πόλης, κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής (CV).

**Μονάδες 7**

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. Αφού το 50% των μαθητών κάνει περισσότερο από 12 λεπτά είναι  $\bar{x} = 12$ . Αφού το 16% κάνει λιγότερο από 10 λεπτά είναι  $12 - S = 10 \Leftrightarrow S = 2$ .

β. Είναι  $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \cong 16,6\%$  άρα δεν είναι ομοιογενές.

γ. Μεταξύ 14 και 16 λεπτών κάνει το 13,5% περίπου των μαθητών, άρα το πλήθος των μαθητών είναι  $4000 \cdot 13,5\% = 540$ .

δ. Επειδή έχουμε καθυστέρηση 5 λεπτών, θα έχουμε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, η νέα μέση τιμή  $\bar{\psi} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17$  και  $S_{\psi} = S_x = 2$  οπότε ο καινούριος συντελεστής μεταβολής

$$CV' = \frac{S_{\psi}}{\bar{\psi}} = \frac{S_x}{\bar{x} + 5} = \frac{2}{17} = 11,76\%$$

επομένως ο συντελεστής μεταβολής μειώνεται κατά  $16,66 - 11,76 = 4,9\%$

## ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα σημερινά θέματα χαρακτηρίζονται από κλιμακούμενη δυσκολία και καλύπτουν ευρύ φάσμα της ύλης.

Ειδικότερα, τα θέματα 1 και 2 απαιτούσαν στοιχειώσεις γνώσεις, ενώ για τα θέματα 3 και 4 απαιτείται αυξημένη συνθετική ικανότητα.